

Mathieu 方程式に基づく平面磁路形パラメトリック変圧器の動作特性と発振安定性に関する研究

吉 田 雅 昭

要 旨

パラメトリック発振は、身近な例としてブランコの動きで説明される。人間がブランコをこぐとき、屈伸運動によって支点から重心までの位置を上下に周期的に変化させることによって、ブランコの振動は徐々に成長し、継続する。このように、振動を決定するパラメータの変化によって振動が成長する現象は、パラメトリック発振、またはパラメータ励振と呼ばれる。

このようなパラメトリック発振の研究や実験としては、1831年のイギリスの実験物理学者 ファラデー (M. Faraday) による水面に出現する波 (Faraday wave) の実験、1859年のドイツの物理学者 メルデ (F. E. Melde) による音叉 (Tuning fork) と弦の振動の実験、1868年のフランスの数学者 マシュー (E. Mathieu) による楕円膜の振動 (Membrane vibration) の研究、1886年のアメリカの天文学者であり数学者である ヒル (G. W. Hill) による月近地点 (Lunar perigee) の研究などが挙げられる。特に、マシューやヒルの研究によって定義された Mathieu 方程式や Hill 方程式は、現在、Mathieu・Hill 方程式として発展を遂げており、線形および非線形問題における解の安定性を決定するための重要な方程式となっている。近年、この Mathieu 方程式は、地震、津波などの自然現象の解析や、振動による建物、橋の構造物の破壊、および船の転覆などの防護対策にも利用され、幅広く研究がなされている。

これらの研究に対して、磁性材料の非線形磁気特性を積極的に利用した非線形磁気応用分野の研究は、計測、制御、情報およびエネルギー変換の各分野にわたり数々の有用な成果をあげてきた。この研究分野で、Mathieu 方程式は、パラメトリック発振を利用した電気機器の動作方程式の検討に利用されてきた。パラメトリック発振現象を利用した電気機器は、構造簡単、定電圧特性、過負荷保護機能、ノイズフィルタ機能などの実用上有利な多くの特徴を有しているが、これらの機器では、磁心の非線形性に基づく複雑な動作が現れ、これが機器の設計法確立、性能向上、実用化促進などへの大きな課題となっている。よって、パラメトリック発振のさらなる安定化とその特徴を積極的に利用するための動作方程式の解明は非常に重要である。

パラメトリック発振を利用した電気機器の解析には、図式解析法、調波平衡法、Runge-Kutta 法などの非線形回路の解析手法が用いられてきた。例えば、マイクロパラメトリック変圧器の動作解析では、調波平衡法が用いられ、その位相差と振幅の関係が明確となっている。この手法では、その機器の電氣的諸条件、磁心の形状寸法の中で、発振状態に影響を与える主体的パラメータを明確

学位記番号と学位：博第 49 号、博士 (工学)

授与年月日：平成 23 年 3 月 19 日

授与時の所属：大学院工学研究科電気電子工学専攻博士後期課程

にするまでに至っていない。荒らは、単相励磁電圧を入力した平面磁路形パラメトリックモータの動作方程式を Mathieu 方程式で表し、その安定性について検討した。このモータの場合、回転子が存在すると、動作方程式は非常に複雑になるため、回転子を除いた状態で解析を行っている。しかし、回転子のないモータの動作方程式であっても、多くの非線形磁気抵抗が存在するために、動作解析は非常に困難となっている。よって、本研究では、基礎的な現象を確実に捉えるために、非線形磁気抵抗の少ない平面磁路形変圧器を取り上げ、Mathieu 方程式とパラメトリック発振機器の発振安定性の関係をより明確にしようとした。

一般に、Mathieu 方程式の解の発振安定性は、その方程式の構成パラメータ a, q に関わる Mathieu 図 ($a-q$ 平面) 上の安定領域と不安定領域で表される。この平面上で、基本波に対する解の振動周期が 1 倍、2 倍、3 倍、4 倍等の発振の不安定領域が周期的に表れる。E. S. Tez らは、この平面上で、直交磁路形パラメトリック変圧器の動作について研究し、動作点が、励磁磁束と同調用コンデンサで決定される二直線の交点から求められることを述べている。しかし、本研究で取り上げる平面磁路形パラメトリック変圧器では、磁路構成が異なるためこの知見が適用できるとは限らない。よって、本研究の目的は、この知見を踏まえた上で、Mathieu 方程式に基づいてパラメトリック発振機器の動作特性と発振安定性について詳細な検討を行うことである。

以下に本論文の概要を述べる。

第 1 章は、緒言であり、本研究の背景・目的について述べている。

第 2 章では、パラメトリック発振の原理、検討に用いた平面磁路形パラメトリック変圧器 (磁心材質: 無方向性けい素鋼板、寸法: 60 mm×90 mm×17.5 mm) の基礎特性について述べた。試作した変圧器が、パラメトリック発振を生じ、定電圧特性および過負荷保護機能を有することを確認した。また、ここでは、実験値から、第 4、5 章の検討に必要な磁化曲線の近似係数を求めた。

第 3 章では、数値解析ソフト MATLAB による基本的な Mathieu 方程式の発振安定性について検討を行った。この方程式の発振安定性については、MATLAB の ODE ソルバである ode45 を使い、4、5 次の Runge-Kutta 法により解析した。発振安定性の判定は、基本波の解の振幅が 23 周期分 ($0 < tspan < 100$ ただし、 $tspan$ は、積分区間を設定するベクトルで、時間区分に相当) 経過後、解の振幅の安定限界値に対して 1% 以下を収束とした。この振幅値を位相図に置き換えることにより、 a, q 平面上の座標で、さらに詳細な発振状態を明らかにすることができた。この結果から、本変圧器の動作方程式の発振安定性の検討に MATLAB による解析が可能であることが明確になった。

第 4 章では、平面磁路形パラメトリック変圧器の動作解析を行った。まず、本変圧器の形状から磁気回路モデルを作成し、各部の非線形磁気抵抗を磁束の 5 次式で近似した。次に、電気回路モデルの共振側から、磁束の 2 階の微分方程式を求め、磁気回路から求めた式をこの式に代入し、本変圧器の基本方程式を求めた。この式をさらに展開し、本変圧器の動作方程式を Mathieu 方程式の形に整理し、本変圧器の動作方程式が基本的な Mathieu 方程式に、減衰項並びに励磁側および共振側の磁束に関わる多くの非線形項で構成されることを明らかにした。解析の結果、発振安定性を示す $a-q$ 平面上において、動作点は、励磁電圧や同調用コンデンサの電氣的諸条件と磁路の寸法形状および磁心の材質によって変化すること、同調用コンデンサ一定の条件下で、動作点の軌跡は、負荷の有無によらず直線関係を示し、その傾きは固定されること、減衰項は、負荷抵抗の減少によって、パラメトリック発振停止領域を q 軸に対して、上方に移動させることが明確になった。これにより、動作点、動作点の軌跡および減衰項と第 2 章で求めた基礎特性との関係を理論的に求めることが可

能であることを明らかにした。

第 5 章では、本変圧器の磁路の寸法形状および材質の変化に対するパラメトリック発振の安定性と磁化曲線近似係数との関係を調べるために、 $a-q$ 平面上における動作点の軌跡の変化について検討を行った。ここで、動作点の軌跡は、磁化曲線近似式の磁束 1 次の係数が増加し、かつ励磁電圧が減少するとき、パラメトリック発振停止領域に接近することが明らかとなった。よって、同一の磁心材質で設計した変圧器は、寸法形状のパラメータが発振安定化の主體的パラメータであることが明確となった。

第 6 章は、結言であり、本研究で得られた結果をまとめたものである。

本研究は、古くから物理的振動現象の安定性の評価に利用されてきた Mathieu 方程式を、非線形磁気応用分野であるパラメトリック発振機器を利用した電気機器に適用し、機器の動作特性と発振安定性との関係に対する検討を行ったものである。この成果は、今後の非線形磁気特性を利用した電気機器の開発や設計に利用でき得るものであり、自然現象を含めた物理現象の振動現象解明にも貢献できるものと考えている。

主指導教員 坂 本 禎 智

Study of the Performance Characteristics and Oscillation Stability of a Planar Parametric Transformer Based on the Mathieu Equation

Masaaki YOSIDA

Abstract

As a swing, the phenomenon of oscillations developing due to changes in a parameter that determines the oscillations is known as parametric oscillation or parametric excitation.

The phenomena of parametric oscillation studies and experiments for a long time, the Mathieu equation defined by E. Mathieu in about the middle of the 19th century is now important in determining the stability of solutions of linear and nonlinear problems. This equation has been used and widely studied for the analysis of natural phenomena such as earthquakes and tsunamis.

In the areas of application of nonlinear magnetic fields actively using the nonlinear magnetic characteristics of magnetic materials, this equation have been used to analyze the operation equations of electrical equipment using parametric oscillations. Electrical equipment that uses parametric oscillation phenomena has many characteristics that are useful for practical application. However, these characteristics involve complex operations based on core nonlinearity, and they are a major problem for establishing design methods of the equipment. Therefore, it is very important to solve operation equations in order to further stabilize parametric oscillation.

Analytical approaches for nonlinear circuits including the harmonic balance method and so on. have been used to analyze electrical equipment that uses parametric oscillation. For example, the harmonic balance method has not identified the principal parameters that affect oscillation. Ara et al. used the Mathieu equation to present the operation equation of a planar parametric motor to which a single-phase excitation voltage was inputted, and discussed its stability. In their study, even in the case of the operation equation of a motor without a rotor, the analysis of operation was very difficult because there was a great deal of nonlinear magnetic resistance. Therefore, this study used a planar transformer with a small amount of nonlinear magnetic resistance in order to reliably identify basic phenomenon, and tried to clarify the relationship between the Mathieu equation and the oscillation stability of parametric oscillation equipment.

In general, the oscillation stability of the solution of the Mathieu equation is expressed as the stable region and the unstable region in the Mathieu diagram (a - q plane) related to the configuration parameters a and q of the equation. The unstable region of oscillations with an oscillation period of the solution that is equal to two, three or four times as long as that of the fundamental wave is periodically shown on this plane. E. S. Tez et al. studied the operation of an orthogonal parametric transformer on this plane and reported that the operation point was determined from the intersection point of two lines determined from a magnetizing flux and a tuning capacitor. However, this knowledge may not be able to be applied to the planar parametric transformer covered by this study, because its magnetic path structure

is different. Therefore, the purpose of this study is to discuss the operation characteristics and oscillation stability of parametric oscillation equipment in detail on the basis of the Mathieu equation in consideration of this knowledge.

The following is a summary of this dissertation.

Chapter 1 gives an introduction and describes the background and purpose of this study.

Chapter 2 describes the principles of parametric oscillation and the basic characteristics of the planar parametric transformer (core material: non-oriented silicon steel plate; dimensions: 60 mm × 90 mm × 17.5 mm) used for this study. It was found that the prototype transformer generated parametric oscillations and had a constant voltage characteristic and an overload protection function. In addition, the approximation coefficient of the magnetizing curve necessary for discussion in Chapters 4 and 5 was determined from experimental values.

Chapter 3 discusses the oscillation stability of the basic Mathieu equation using the numerical analysis software MATLAB. The ode45 MATLAB ODE solver was used to analyze the oscillation stability of this equation using the fourth-order and fifth-order Runge-Kutta method. For the evaluation of oscillation stability, the amplitude of the solution of the fundamental wave was assumed to converge when it was 1% or less of the stability limit value of the amplitude of the solution after 23 periods elapsed. By transposing this amplitude value in a phase diagram, further detailed oscillation conditions could be clarified in the coordinates on the a-q plane. Based on this result, it was found that analysis using MATLAB could be applied to a study of the oscillation stability of the operation equation of this transformer.

Chapter 4 analyzes the operation of the planar parametric transformer. First, a magnetic circuit model was made based on the shape of this transformer, and the nonlinear magnetic resistance of each part was approximated by a fifth-order equation of magnetic flux. Next, a second-order differential equation of magnetic flux was determined from the resonance side of the electric circuit model, and an equation determined from the magnetic circuit was substituted into this equation to determine a basic equation of this transformer. This equation was further developed, and the operation equation of this transformer was simplified in the form of the Mathieu equation. It was found that the operation equation of this transformer consisted of the basic Mathieu equation, an attenuation term, and many nonlinear terms related to the magnetic flux on the excitation side and the resonance side. As a result of analysis, it was found that the operation point varied on the a-q plane that indicates oscillation stability, depending on the excitation voltage, the electric conditions of the tuning capacitor, the shape and dimensions of the magnetic path, and the core material. It was also found that the locus of the operation point was linear and its slope was fixed with or without a load under constant conditions of the tuning capacitor, and that the attenuation term moved up the parametric oscillation stop region with reference to the q axis as load resistance decreased. Consequently, it was found that the relationships between the operation point, the locus of the operation point, the attenuation term, and the basic characteristics determined in Chapter 2 could be theoretically determined.

Chapter 5 discusses changes in the locus of the operation point on the a-q plane in order to examine the relationships of parametric oscillation stability and the approximation coefficient of the magnetization

curve to changes in the dimensions, shape, and material of the magnetic path of this transformer. As a result, it was found that the locus of the operation point moved closer to the parametric oscillation stop region when the first-order coefficient of the magnetic flux of the approximation equation of the magnetization curve increased and the excitation voltage decreased. Therefore, it was found that the parameters of the shape and dimensions of transformers made of the same material were principal parameters of oscillation stability.

Chapter 6 presents the conclusion and summarizes the results obtained in this study.

Professor (Chairperson) Yosinori SAKAMOTO