

# 積分導入に関する一考察

尾崎 康弘\*

## A Teaching in Integral Calculus

Yasuhiro OZAKI\*

### Abstract

This Report is intended to introduce an idea for teaching in Integral Calculus.

First, we show the history of an area.

Secondary, we show definite integral and students computes the integral.

And we show indefinite integral.

It is important for us to teach in integral calculus.

**Key words:** The history of the area, Area, Integral, Cavalieri

### 1. はじめに

文部省の指導要領による、小中高校の数学指導方法の変化などにより、学生の多様化が著しいといわれて久しい。本学学生に於いても同様のことが言える。しかも、その多様性は年々拡大している。学生の多様化は、学力のみならず、学習意欲の面からも考慮する必要がある。学習者に大きな影響を与えるものは、学力の低さよりも、学習意欲の欠如の方である。この意欲のない学力の低い学習者に教育する有効な方法があるだろうか。この問題に対して、開学以来、種々の教育指導方法を考え、実行してきた。

今回は、積分導入に関しての一提案である。積分記号を見ると半分以上の学生が横を向くという現状を打破するため、面積がなぜ必要になったか。その面積を正確に計算するために積分が必要になったことを簡潔に述べてから、積分の授業を実施する方法である。この概略を以下に述べる。

### 2. 授業内容の概略

従来の授業では、不定積分の定義とその計算を実施してから、定積分を教授した。それから、定積分の応用として面積を求めた。面積導入の時は、区分求積法・台形公式などの近似式を与えたり、マルチメディア映像で示したりして受講生の学習意欲を向上させるような試みを行ってきたが、まだ十分ではない。そこで、今回の試みを提案する。

今回の試みの概略を図1で示すがその要点を、以下に略記する。

①最初に面積の歴史を導入する(20分程度の予定)

②定積分を不定積分より早く導入する

③積分と面積の関係をより強く意識して授業する

これら全てが大切であるが、ここでは特に、面積の歴史導入について述べる。

### 3. 面積の歴史導入

面積の概念がなぜ必要になったかを古代エジプトを例にして話しをする。このことにより、面

---

平成14年12月26日

\* システム情報工学科・教授

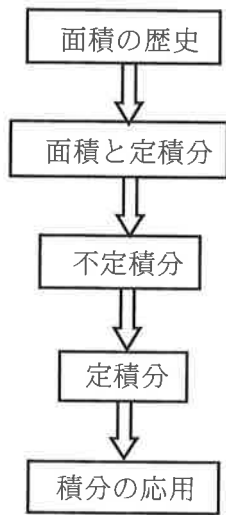


図1 授業の流れ

積の必要性和先人の探求心について学生に理解させる。そして、面積を積分で求めることが如何に簡単であるかを受講生に再認識させる。この面積史の導入は、応用数学（3年前期・選択2単位）で授業したことがある。その授業の要点を20分程度で話している。この面積史は、学生に好評である。

### 3.1 古代エジプトと面積

エジプトでは、毎年7月～10月頃洪水によって定期的に農地が泥土で覆われる。そして10月頃ナイル川の水位が下がりはじめ、元に戻る。こ

の洪水は、彼らに天然の肥料をもたらした。しかし、役人は不平が生じないように農地の区画を測定しなければならなかった。この農地測定ため面積の概念が必要になった。そのためには、第一に直角を測定する必要があった。彼らは、三辺の長さが3:4:5の比になる三角形は直角三角形であることを知っていた。そして長方形・直角三角形の面積は正しかった。しかし、彼らの求積法は、間違っただけのものもあった。それらを見てみよう。

### 3.2 求積の例

エジプト時代、洪水で肥沃になった農地は、いろいろな形をしていたであろう。このいろいろな形の面積を求めることは、非常に困難であったであろう。しかし、役人は、農民に面積を示さなければならなかった。この時代の面積計算について述べる。長方形・正方形・直角三角形などは、正しい面積を求めていた。しかし、二等辺三角形や台形の面積は図2で示すように、正しくなかった。しかし、どちらも正しい面積より値が大きく、役人側にとっては損が無いようになっている。

円の面積を調べてみると  $\left(\text{直径} \times \frac{8}{9}\right)^2$  で計算されている。つまり、

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1604 \dots$$

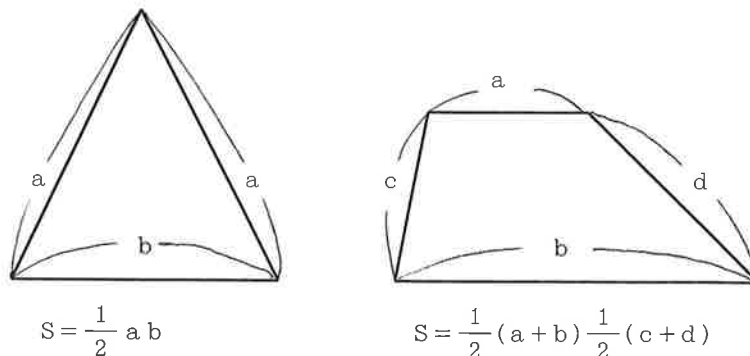


図2 二等辺三角形と台形の面積

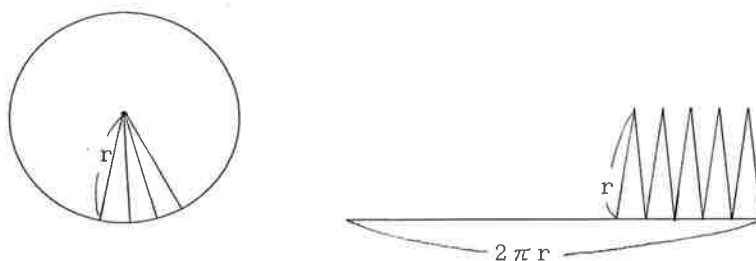


図3 ケプラーの円の面積の求め方

である。やはり、円の面積も正しい値より小さくなっている。

この円の面積の求める方法は、アルキメデスなどの人々が考えてきた。ここでは、ケプラー（ドイツ・1571～1630）による円の面積の求め方を図3に示す。

これは、円周を無数の微少な円弧に分けて考える。それらの微少な円弧を底辺とし、高さ  $r$  の三角形の面積の総和が円の面積に等しいので、次のように計算される。

$$\begin{aligned} \text{円の面積} &= (\text{半径}) \times (\text{円周の長さ}) \times \frac{1}{2} \\ &= r \times (2\pi r) \times \frac{1}{2} = \pi r^2 \end{aligned}$$

ここで積分を用いて半径  $r$  の円の面積  $S$  を求めてみると、非常に簡明である。積分を使用しない方法に比べると、容易であることが分かる。以下に積分を用いて、半径  $r$  の円の面積  $S$  を求める計算を示す。

円の方程式を  $x^2 + y^2 = r^2$  とすると  $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$  である。

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S}{2} &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \sin^{-1} \frac{x}{r} \right]_{-r}^r \\ &= \frac{\pi r^2}{2} \\ \therefore S &= \pi r^2 \end{aligned}$$

#### 4. 積分の導入

求積理論は、アルキメデス以来の「取り尽くし法」に始まった。この方法は無限・極限を回避していたが、近代数学は、「取り尽くし法」を出発点としてそれを求積の一般方法に転化しようとした。カバリエリ・ウォリス・ニュートン・ライプニッツ等により現在の微分積分学が成立した。ここでは、図4・5にカバリエリの面積に関する思考方法とその応用を示す。図4には、カバリエリの定理といわれるものを示す。図形Aと図形Bについて、「ある平行な切り口の長さが互いに相等しい」ときは、面積が等しいことを示している。この具体例として、図5に同面積の図形を示す。これらの面積は全て同じである。

先に掲げた数学史上有名な人々の求積に関する業績は、話しだけにし、次節以下のように授業を行う。

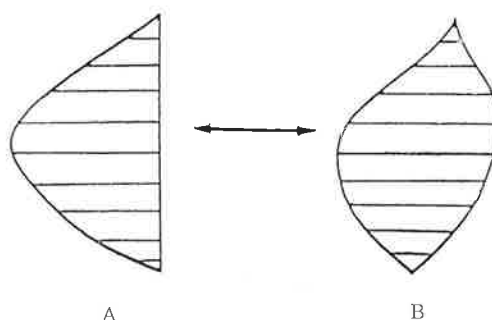


図4 カバリエリの原理

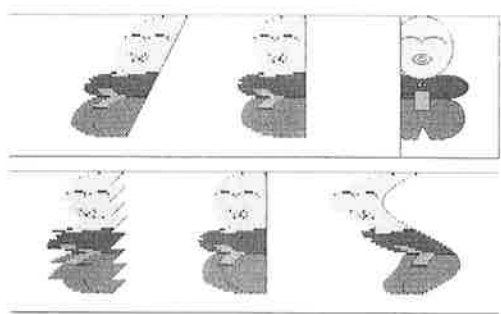


図5 カバリエリの原理の応用

### 5. 面積との関連（定積分の計算）

通常は、不定積分の定義を導入するのだが、それより先に面積と定積分との関係を示して、積分の重要性を感じて貰うことを考慮した。一般に2関数  $f(x)$  と  $g(x)$  とで囲まれた部分の面積  $S$  は、その交点の  $x$  座標を  $a, b$  とすると

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

であることを先に示し、それから不定積分の導入をすべきである。

面積を表に出すことにより、受講学生の興味と意欲を喚起することが大切である。このことに関しては、分かりやすい色彩豊かな映像やアニメーションを利用した教育方法を導入することが重要である。面積史と映像やアニメーションを導入することは、有効な教育方法の一つであり、実践するべきである。

面積と定積分との関係を意識させてから、不定積分を計算させることが大切である。この不

定積分と定積分の計算には、拙著の「教養の微分積分」と佐野公朗氏の著書とを利用すると良いと思っている。

しかし、基本的な事項に関する受講生の学力不足は、本人の自覚を待たなければならないが、あるレベル以上は困難かも知れない。しかし、学習意欲を向上させ、彼らの学力向上は可能だと思っている。それには、出来るだけ少人数にして教育指導することであろう。

### 6. おわりに

面積の歴史導入と面積を意識した積分の授業を実施してみると、受講生には、好評である。しかし、現実には、不定積分の計算と分数計算を実行する必要がある。このことに関しては、受講生が粘り強く反復練習しなければならない。この意欲に関しては、リメディアル教育と少人数教育で克服する必要がある。

数学に限らず、全ての教科に於いて、受講生の学習意欲を向上させることが最大の課題である。いかなる教育方法によって、受講生を変えるかが問題解決のポイントである。

### 参考文献

- ①船山 良三「身近な数学の歴史」東洋書店、1991
- ②尾崎 康弘「数学教育へのパソコン導入の試み」一般教育学会誌 第9巻第1号、1987
- ③尾崎 康弘「市販ソフト“マテマティカ”を用いた数学教育の試み」一般教育学会誌 第17巻第2号、1995