質点系における内力のモーメントの和に関する説明について

清　野　大　樹*

An Explanation for the Resultant Moment of the Internal Forces of System of Particles

Daiju SEINO*

Abstract

The resultant moment of the internal forces of system of particles is nothing, $\vec{N}_{\rm int}=0$, in general. That is led from the law of action and reaction that (1) a mutual interaction between two particles has the same line of action and (2) it is equal in magnitude and opposite in direction. However, as simplify natural phenomenon with bending body and approximate the rigid boy to line, we have often the experience that seems as the phenomenon dose not satisfy the condition (1) of the law of action and reaction. In this paper, we reveal such facts and try to clear a method that $\vec{N}_{\rm int}$ is consistent with the case of the condition (1) to be unsatisfied seemingly. The consideration of the method is important for beginners in order to recognize a property of nature.

Key words: Mechanics, system of particles, resultant moment of internal force, the law of action and reaction

1. はじめに

質点系の回転の運動方程式は，全角運動量を$\vec{L}$，力のモーメントの和を$\vec{N}$とすると，

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N} \qquad (1)$$

と表せる。ここで，$\vec{N}$は，系の外部から系の各質点に作用する外力のモーメントの和と系内部の質点間で及ぼし合う力（内力）のモーメントの和に分けられる。内力のモーメントの和$\vec{N}_{\rm int}$は，作用反作用の法則により，

$$\vec{N}_{\rm int}=0 \qquad (2)$$

となり，(1)の$\vec{N}$は外力のモーメントの和だけで表せる。質点系の回転の運動方程式は，一般にこのように説明されている。

(2)が成り立つのは，作用反作用の法則「2つの質点の相互作用は，

①　それらの質点を結ぶ直線に沿って働き，

②　大きさは等しく向きは反対

である」[1]が根拠となっている。作用反作用の法則には①と②の2条件が必須である。

しかし，現象を力学的に単純化して扱うと，見かけ上，条件①が成り立たないことが多々起こる。このような場合でも，(2)は成立するとして扱うことができる。現象を単純化して条件①が成り立たない場合に，作用反作用の法則との関係を丁寧に言及したものはほとんど見当たらない。初学者がこのような問題にぶつかったとき，曖昧なままともかく(2)が成立するとして理解すると，自然の法則を正しく認識したことにはならない。

平成14年12月26日
* システム情報工学科・教授

2. 内力のモーメントの和がゼロであること

2体問題

質点1と質点2の2体問題をはじめに考える。

質点1：位置 $\vec{r}_1$，質点2から受ける作用 $\vec{F}_{12}$

質点2：位置 $\vec{r}_2$，質点2から受ける作用 $\vec{F}_{21}$

とする。内力のモーメントの和は，

$$\vec{N}_{\text{int}}=\vec{r}_1\times\vec{F}_{12}+\vec{r}_2\times\vec{F}_{21}$$

ここで，「2つの質点の相互作用は，大きさは等しく向きは反対である」という作用反作用の条件②を前提に議論を進める。このとき，$\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$ であるので，

$$\vec{N}_{\text{int}}=(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_{12}$$

これは，「$\vec{N}_{\text{int}}=0\Leftrightarrow\vec{F}_{12}$ と $\vec{r}_1-\vec{r}_2$ は平行」を意味する。すなわち，2体問題の場合，$\vec{N}_{\text{int}}=0$ ならば，「2つの質点の相互作用は，それらの質点を結ぶ直線に沿って働く」ことになり，条件①を満たす。逆は当然成り立つ。

多体問題

質点の数が3個以上の質点系では，$i=1,2\cdots,n$ とおいて，各質点の座標を $\vec{r}_i$，質点 i が j から受ける力を $\vec{F}_{ij}$ とすると，内力のモーメントの和 $\vec{N}_{\text{int}}$ は，

$$\vec{N}_{\text{int}}=\sum_{i}^{n}\vec{r}_i\times\sum_{j(\neq i)}^{n}\vec{F}_{ij}=\sum_{i<j}^{n}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}$$

ここで作用反作用の法則の前提条件② $\vec{F}_{ji}=-\vec{F}_{ij}$ を使った。この式から，$\vec{F}_{ij}//\vec{r}_i-\vec{r}_j$（$\vec{F}_{ij}$ が質点 i，j を結ぶ直線に沿って作用する）ならば $\vec{N}_{\text{int}}=0$。そうでないなら，特殊な場合を除き，$\vec{N}_{\text{int}}=0$ となるとは限らない。この論法では，(2) が一般に成り立つのは，2つの質点の相互作用がそれらの質点を結ぶ直線に沿って働くという条件①が肝要である。しかし，見かけ上，$\vec{F}_{ij}$ が $\vec{r}_i-\vec{r}_j$ に平行でなくても (2) は常に成り立つ。

3. 簡単な静力学の例

良く知られている天秤の釣り合いをモデル化して考察する。図1に示すように，糸を棒の中点に結んで天井から吊るす。棒には質量がなく，その両端に同じ質量 m の質点1と2を，中点に質量 M の質点3をつける。棒は，丈夫で曲がらないが，力を伝達することはできるとする。

図1　モデル化した天秤の釣り合い

棒が静止しているとき，質点1の運動方程式は，質点1に作用している内力を $\vec{f}_{13}$，重力加速度を g とすると，次式を満たす。

$$\text{質点1：}f_{13}-mg=0 \tag{3}$$

同様に，質点2と3の内力をそれぞれ $\vec{f}_{23}$ と $\vec{f}_3$，糸の張力を $\vec{T}$ すると，

$$\text{質点2：}f_{23}-mg=0 \tag{4}$$

$$\text{質点3：}T-Mg-f_3-mg=0 \tag{5}$$

内力は質点間の相互作用である。質点3が質点1，2から受ける力をそれぞれ $\vec{f}_{31}$，$\vec{f}_{32}$ とすると，$\vec{f}_3=\vec{f}_{31}+\vec{f}_{32}$。また，質点1と2は質点3に関して対称であるので，$\vec{f}_{31}$ と $\vec{f}_{32}$ の大きさと向きは等しく，$\vec{f}_{31}=-\vec{f}_{13}$ かつ $\vec{f}_{32}=-\vec{f}_{23}$ となる（図2を参考）。したがって，$\vec{f}_{13}$ と $\vec{f}_{31}$ は，作用と反作用の前提条件②の関係にあり，互いに大きさが等しく向きが反対である。しかし，これらの力は「それらの質点を結ぶ直線に沿って作用」していない。すなわち作用反作用の法則の条件①が成り立っていないのである。$\vec{f}_{23}$ と $\vec{f}_{32}$ の関係も①を満足していない。しかし，内力のモーメントの和はゼロ，すなわち (2) を満たしていることを容易に確かめことができる。

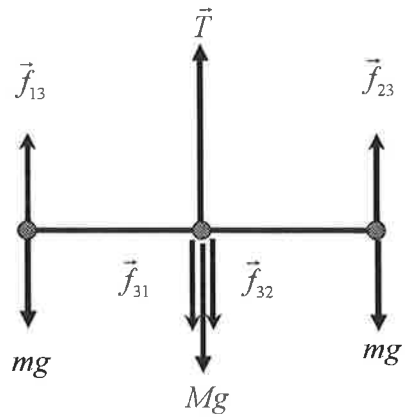

図２　図１の力学的構造

4.　作用反作用の法則を使った説明（1）

この節と次節で前例の結果を作用反作用の法則から導く。

図３に示すように，質量のない丈夫な棒の両端に同じ質量 m の質点１と２をつけ，棒の両端に質量のない糸を結ぶ。糸の中点に質量 M の質点３をつけ，質点３に他の糸をつけて天井から吊るす。質点1〜3で構成される質点系の釣り合いを考える。

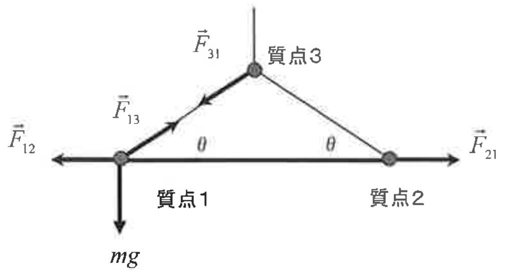

図３　天秤の釣り合い

棒は水平に静止し，棒と糸のなす角度を θ とする。質点１には外力の重力のほかに，内力として質点２から $\vec{F}_{12}$，質点３から $\vec{F}_{13}$ が作用している。$\vec{F}_{12}$ と $\vec{F}_{21}$ および $\vec{F}_{13}$ と $\vec{F}_{31}$ はそれぞれ作用反作用の法則の条件①と②を満たしている。質点１は静止しているので，その水平方向と鉛直方向の運動方程式は，

$$\text{水平方向：} F_{12}-F_{13}\cos\theta=0 \qquad (6)$$

$$\text{鉛直方向：} F_{13}\sin\theta=mg \qquad (7)$$

となる。水平方向に動いていないので，水平方向の成分はない(6)。鉛直方向も同様である(7)。結局，内力の合力は $\vec{F}_{13}$ の鉛直成分でその大きさは重力に等しい。

角度 θ が変わっても（6）と（7）の関係は常に保たれる。$\theta\to0$ の極限を考えると，$\sin\theta\to0$ となるため，$\vec{F}_{13}$ は(7)を満たしながら $\vec{F}_{13}\to\infty$ となる。したがって，$\vec{F}_{12}$ は（6）を保ちながら $\vec{F}_{12}\to\infty$ となる。角度 θ をゼロにした極限において，棒および質点1，2を結んだ糸を一体化した状況は，前例(図1)と等価になる。(3)の $\vec{f}_{13}$ は，$\vec{F}_{13}$の鉛直成分に等しい。

5.　作用反作用の法則を使った説明（2）

図１の例では，棒の中心に対して曲げる作用が働いている。線状の物体（剛体）は，曲げに対する応答を考慮していない。剛体は，外力が加わっても変形しない仮想的な物体で，現象を単純化するとき役立つ概念である。しかし，線状の物体に力のモーメントが加わっているときは厚さを考慮する必要がある。

図１の例で棒に厚さを考慮する。図４に示すように，質点３を厚さ方向に質点４と５に分けて考える。質点１と４の間の相互作用は $\vec{F}_{14}$ と $\vec{F}_{41}$，質点１と５の間の相互作用は $\vec{F}_{15}$ と $\vec{F}_{51}$ で，作用反作用の法則の条件①と②を満たしている。質点１が静止しているなら，これに作用している内力の合力 $\vec{F}_{14}+\vec{F}_{15}$ の水平成分はゼロとなり，鉛直成分の大きさは外力（重力）に等しくなる。多数の質点がある場合も質点１に作用する内力は，作用反作用の法則を満足し，内力の合力は鉛直方向だけとなるのは明らかである。

棒を簡単化して線状にすることは，質点４と５を近づけて一致させることである。このとき，質点１に作用する内力 $\vec{F}_{14}$ と $\vec{F}_{15}$ の大きさは無

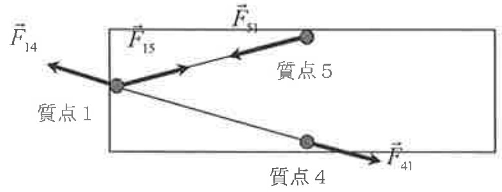

図４　線状物体の作用反作用

限大になるが，合力の水平成分はゼロで，鉛直成分だけが残り，それは外力に等しく，(3) の $\vec{f}_{13}$ になる。

6. 簡単な動力学の例

動力学の簡単な例を示す。図５のように，質量のない丈夫な棒に質点１と２を両端に，質点３を中央に固定して，摩擦のない水平な床の上に置く。簡単のために３つの質点の質量は共に m とする。いま，質点１に撃力 $\vec{F}$ を微小時間与える。撃力の方向は，棒に垂直で水平方向である。

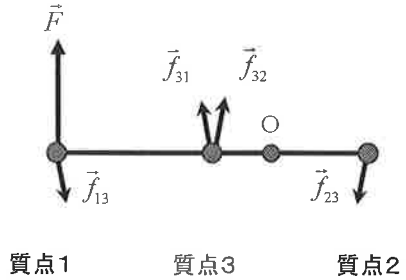

図５　撃力による運動

(2) が成り立つとして，運動方程式 (1) から質点系の回転運動を求めると，右端から棒の３分の１の点Ｏを瞬間回転軸にして，撃力が作用した微小時間回転する。このとき，質点２と３の各質点が運動するのは内力の作用による。質点１も内力の影響を受ける。

各質点の内力を図５に示すように $\vec{f}_{13}$，$\vec{f}_{23}$，$\vec{f}_{31}$と $\vec{f}_{32}$ の合力とおく。各質点の運動方程式を解くことにより各内力が求まるが，各質点の角運動量は瞬間回転軸Ｏに関して時間的に変化するため，各内力の棒に垂直な成分は必ず存在することになる。したがって，この場合も前述の静力学の例と同じように質点間の相互作用は，質点を結ぶ直線に沿って作用しておらず，作用反作用の条件①を満足していない。

図５の例が作用反作用の条件①を満たしていないのは，棒を線状に単純化したため，力のモーメントの効果を正しく取り込めなくなったからである。そこで，次の図６の問題を設定する。

図６では，軽くて丈夫な棒を３本用意する。各棒は，自由に回転できる蝶番で結ばれていて，その接点に質点１，２，３を固定する。棒 AC と BC は，長さが等しく，棒 AB となす角度を θ とする。これを摩擦のない水平な床の上に置き，質点１に撃力 $\vec{F}$ を微小時間与える。撃力の方向は，棒 AB に垂直で水平方向である。

撃力 $\vec{F}$ を与えたとき，各質点間に相互作用が働く。それらを図５の $\vec{F}_{ij}$ $(i,j=1,2,3,\ i\neq j)$ で示す。$\vec{F}_{ij}$ と $\vec{F}_{ji}$ は作用反作用の法則の条件①と②を満たしている。この条件で質点１〜３の系全体の回転運動を求めて，各質点の運動方程式から $\vec{F}_{ij}$ を求めることができる。

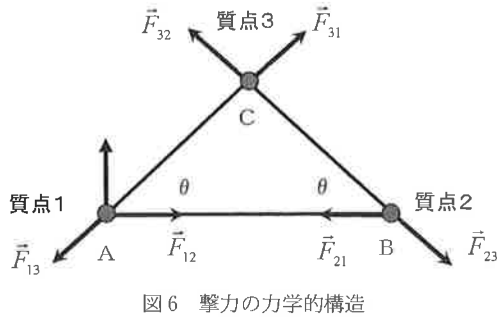

図６　撃力の力学的構造

ここで，$\theta\rightarrow 0$ の極限をとれば，$\vec{F}_{13}$ と $\vec{F}_{12}$ の合力は図５の $\vec{f}_{13}$，$\vec{F}_{21}$ と $\vec{F}_{23}$ の合力は同じく $\vec{f}_{23}$，$\vec{F}_{31}$ と $\vec{F}_{32}$ の合力は $\vec{f}_{31}$ と $\vec{f}_{32}$ の合力になることがわかる。

7. ま と め

基本的な現象を扱うと，見かけ上は作用反作用の法則を満たさないが，内力のモーメントの和はゼロ（2）となる例は数多いことがわかる。構造力学の初歩に出てくる，壁に垂直に固定した棒の力学的構造も典型的な例である。このような一見自然の法則に矛盾することが起こるのは，力のモーメントが作用する現象を単純化して，線状の物体に近似する場合である。

この困難を避けるには，曲げが起こるところを自由に回転できる蝶番で置き換え，状況によっては補助棒を挿入し，その極限をとったとき元の状況に合うようにすればよい。初学者に基本的な現象を解説するとき，この点に配慮して説明すれば，彼らの自然認識は深いものになるであろう。

参考文献

1) 山内恭彦「一般力学」（増訂第 3 版）p. 97 1959 岩波書店