

# ファジィモデルに基づく不安定周期領域の安定化

清水 能理\*

## Stabilization of Unstable Periodic Regions Based on Fuzzy Model

Yoshimasa SHIMIZU\*

### Abstract

Chaos control is stabilizing the state of a chaotic system into the peculiar unstable periodic orbit. In chaos control proposed until today, the target system is known in many cases. However, when the generating mechanism of chaos is unknown, the control only based on time series data observed from the system is also required. Delayed feedback control applies control input based on the difference between the  $\tau$ -time delayed state and the current state. Where  $\tau$  denotes the periods of UPO. Although this method needs correctly no chaos orbit if the periods of UPO is known, there exists the limitation of the odd number property. As the method to compensate this fault, there is prediction-based feedback control using the prediction value of  $\tau$ -time future state. But, PFC needs to calculate this prediction value analytically by using the known mathematical model of the target system. Then, the chaos control for unknown chaotic systems is proposed. This technique has the hybrid type control input to improve faults of DFC and PFC. The prediction value to be used in the control input, is determined by using neural network or fuzzy neural network. The control inputs are impressed only near periodic points of the target UPO using the concept of unstable periodic region.

**Keywords** : unknown system, chaos control, delayed feedback control, prediction-based feedback control, neural network, fuzzy neural network

### 1 はじめに

非線形電気回路, 電子回路素子, 流体, 株価そして血糖値など, カオスは自然のシステムや人工システムを問わず, 非線形性を有するシステム(系)に遍在する。カオス力学系は, 有界

の領域内で起こる非周期で初期値に鋭敏な決定論的法則に基づく振動現象である [1, 2]。

工学分野でのカオス応用のひとつであるカオス制御の代表的なものに時間遅延フィードバック制御 (DFC: Delayed Feedback Control) 法がある。比較的ロバストな特性を有し, 不整脈の制御に応用されたが, 「奇数条件」の制約が存在し, 安定性に関する理論的な保証は得られていない。DFC法の欠点を補う方法と

---

平成 21 年 12 月 14 日受理

\* システム情報工学科・講師

して、未来の状態の予測値に基づく入力を用いた予測に基づくフィードバック制御 (PFC: Prediction-based Feedback Control) 法が提案されたが、制御系設計において、状態の予測値を自由系の数学モデルを用いて求める必要がある [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]。

従来のカオス制御では、数学モデルが既知ならばコントローラーを設計できると仮定され、対象を数学モデルが既知なシステム (既知系) とする場合が多く、数学モデルを用いた手法が多く提案された。一方、乱流や不整脈など対象システムが自然や生体であるとき、状態のダイナミクスを記述する微分・差分方程式を得るのが困難な場合もある。厳密な数学モデルが得られず、系の構造が未知であるカオスシステム (未知系) を安定にするには、観測される系の状態やその時系列を用いたモデリングに基づいたカオス制御が考えられる [2, 3, 10, 11, 12, 13, 14, 15]。

## 2 システム状態に基づくカオス制御

式 (1) を  $n$  次元非線形離散時間システムとする。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{R}^n$  はシステムの状態ベクトル、 $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{R}^m$  は制御入力ベクトルである。状態のダイナミクスを記述する数学モデル式 (1) は既知であり、 $\mathbf{x}(k)$  と  $\mathbf{u}(k)$  について非線形関数  $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$  は微分可能である。そして、 $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$  のとき式 (1) はカオスを発生し、このとき状態の正確な予測値を計算することができる。エルゴード性を有する式 (1) のカオスシステムから生成されるストレンジアトラクタの中に埋め込まれている周期  $\tau$  の UPO の各不安定周期点を  $\mathbf{x}_{pi}(i=1, \dots, \tau)$  とするとき、システムの状態を  $\mathbf{x}_{pi}$  に安定化させる。状態フィードバック

を操作量用いる Pyragas の DFC 法 [5] と潮らの PFC 法 [9] について述べる。

### 2.1 時間遅延フィードバック制御

式 (2) で表される離散時間システムに対する DFC の制御入力は、 $\tau$  時刻過去の状態と現在の状態との差に基づく外部入力である [5]。

$$\mathbf{u}(k) = \begin{cases} K_D(\mathbf{x}(k-\tau) - \mathbf{x}(k)) & \text{if } r(k) < \varepsilon \\ \mathbf{0} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $K_D \in \mathcal{R}^{l \times m}$  はフィードバックゲイン行列であり、 $r(k)$  は  $\tau$  時刻過去の状態と現在の状態の差に基づくベクトルのノルムで、式 (3) で表される。

$$r(k) = \|\mathbf{x}(k-\tau) - \mathbf{x}(k)\| \quad (3)$$

$\varepsilon$  は  $\tau$  周期の UPO の各周期点近傍を示す十分に小さな正の実数であり、制御入力は各周期点近傍においてのみ印加する [3, 5]。この方法では、UPO の各周期点近傍における線形化システム行列が、1 よりも大きな実固有値を奇数個もつ場合に、元の対象とするシステムを安定にするゲイン  $K_D$  が存在しない (奇数条件) [7, 8]。

### 2.2 予測に基づくフィードバック制御

式 (4) で表される PFC の制御入力は、 $\tau$  時刻未来の状態の予測値と現在の状態との差に基づいて決定する [9]。

$$\mathbf{u}(k) = \begin{cases} K_P(\hat{\mathbf{x}}(k+\tau) - \mathbf{x}(k)) & \text{if } r(k) < \varepsilon \\ \mathbf{0} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 $K_P \in \mathcal{R}^{l \times m}$  はフィードバックゲイン行列、そして  $\hat{\mathbf{x}}(k+\tau)$  は、既知の数学モデル  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$  を  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$  として  $\tau$  回繰り返して

て用いた  $\tau$  時刻未来の状態の予測値で、式 (5) のように表すことができる。

$$\hat{x}(k+\tau) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{\tau \text{ times}}(x(k), 0) = f^\tau(x(k), 0) \quad (5)$$

式 (4) に示すように、この制御入力を **DFC** と同様に、目標の **UPO** の各周期点近傍においてのみ印加する [5, 9]。

### 3 Jury の安定判別法

システム行列の可制御対  $(A(k), B(k))$  からフィードバックゲイン  $K(k)$  を求める方法として、システムの極を求めることなく安定性を判断し、ゲインなどのパラメータの有効な範囲を決定する **Jury** の安定判別法がある [16]。

$N$  次元の線形離散システムの不動点 (あるいは各周期点) に状態を安定させるとき、特性多項式  $Z(z)$  を式 (6) とする。

$$Z(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (6)$$

ただし、 $a_N = 1$  である。表 1 の 1 行目は、 $Z(z)$  の係数  $a_N, a_{N-1}, \dots, a_1 z, a_0$  を定数項  $a_0$  から順番に並べて行き、2 行目は逆に  $z^N$  の係数  $a_N$  から並べる。そして、奇数行目の要素は式 (7) のように一つ上の行の係数を用いて  $b_k (k = 0, 1, \dots)$  として求め、また偶数行目は

それを逆に並べる。要素の数が 3 になる行まで、この操作を続ける。

$$b_k = \begin{bmatrix} a_0 & a_{N-k} \\ a_N & a_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

特性方程式  $Z(z) = 0$  の全ての根の絶対値  $|z_j| (j = 1, 2, \dots, N)$  が 1 より小さくなるための必要十分条件は、以下の  $N-1$  個の条件式が全て満たされることである。

$$\begin{array}{rcl} Z(1) & > & 0 \\ (-1)^N Z(-1) & > & 0 \\ |a_0| & < & a_N \\ |b_0| & > & |b_{N-1}| \\ & & \vdots \\ |r_0| & > & |r_2| \end{array}$$

不等式すべての共通部分として、式 (6) の係数  $a_N, a_{N-1}, \dots, a_1 z, a_0$  に含まれる  $N$  次元システムのパラメータを設定する。

### 4 ハイブリッド型カオス制御

**PFC** 法 [9] と **DFC** 法 [5] とのハイブリッド型のカオス制御法では、**UPOs** とフィードバックゲインおよび系の状態の予測値をモデルから解析的に求める。制御入力 **DFC** と **PFC** の各々のカオス制御に相当する二つの制御入力部分からなる。**DFC** 部分と **PFC** 部分のバランス・パラメータ  $w$  を導入し、ゲイン  $K$  は共通のものを用いる。**Jury** の安定判別法 [16] により  $w$  と  $K$  の範囲を求める。得られた領域  $w - K$  に属する組  $(w, K)$  を用いた制御系モデルに対して予備実験を行い、対象システムの安定に適したパラメータ値を評価関数から決定する。

制御対象であるカオスシステムの線形化システムが奇数条件を満たすとき、**DFC** を用いてもシステムを安定化できない [7, 8]。しかし、

表 1: Jury の安定判別法

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_{N-k}$	$\dots$	$a_{N-1}$	$a_N$
$a_N$	$a_{N-1}$	$a_{N-2}$	$\dots$	$a_k$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_{N-k}$	$\dots$	$b_{N-1}$	
$b_{N-1}$	$b_{N-2}$	$b_{N-3}$	$\dots$	$b_{k-1}$	$\dots$	$b_0$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$r_0$	$r_1$	$r_2$					

DFCと同じ過去の状態  $\mathbf{x}(k-\tau)$  を用いても、ハイブリッド型制御手法は奇数条件の制約を受けない。さらに、PFC法の予測値の誤差の問題も改善出来る。

DFCとPFCに基づくハイブリッド型の制御入力を式(8)とする。

$$\mathbf{u}(k) = \begin{cases} \mathbf{u}_P(k) + \mathbf{u}_D(k) & \text{if } r(k) < \varepsilon \\ \mathbf{0} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{u}_P(k)$ は式(9)で表される。

$$\mathbf{u}_P(k) = K(1-w)\{\hat{\mathbf{x}}(k+\tau) - \mathbf{x}(k)\} \quad (9)$$

一方、 $\mathbf{u}_D(k)$ は式(10)で表される。

$$\mathbf{u}_D(k) = Kw\{\mathbf{x}(k-\tau) - \mathbf{x}(k)\} \quad (10)$$

式(9)の $\hat{\mathbf{x}}(k+\tau)$ は、式(11)のように設計する。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+\tau) &= \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{\tau \text{ times}}(\mathbf{x}(k), \mathbf{0}) \\ &= f^\tau(\mathbf{x}(k), \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (11)$$

ゲイン行列は  $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$  とし、パラメータ  $w$  は  $0 \leq w \leq 1$  の間の実数値をとる。この制御入力をUPOの各不安定周期点  $\mathbf{x}_{pi}$  の近傍においてのみ印加する。システムの状態が目標とするUPOの近傍にあるとき、現在の  $\mathbf{x}(k)$  の最も近傍に在る  $\mathbf{x}_{pi}$  を  $\mathbf{x}_{pk}$  とする。式(8)の  $r(k)$  は、式(12)のように、 $\mathbf{x}(k)$  と  $\mathbf{x}_{pk}$  の誤差ベクトルのノルムを表す。

$$r(k) = \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{pk}\| \quad (12)$$

式(8)の  $\varepsilon$  は十分に小さな正の実数で、各

$\mathbf{x}_{pi}$  近傍領域の大きさを示す。

## 5 問題の記述

対象とするシステムは、カオスを発生している未知の  $m$  次元離散時間システムとする。このカオスシステムはエルゴード性を有しており、時系列データに基づき時間発展する状態の非周期的な軌道から、ストレンジアトラクタと呼ばれる  $m$  次元の領域を構成できるが、状態の正確な予測値は得られないとする。システムの状態のダイナミクスを記述する数学モデルは得られないが、未知システムからの出力として  $m$  次元の時系列データ  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^m$  を直接観測することができる。状態ベクトル  $\mathbf{x}_k$  は、式(13)のように  $m$  個の状態  $x_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) から構成されるとする。

$$\mathbf{x}_k = [x_{1k} \ x_{2k} \ \dots \ x_{mk}]^T \quad (13)$$

ニューラルネットワーク(NN)によってファジシステムを構成したファジ・ニューラルネットワーク(FNN)を用いることにより、未知システムの時系列データ  $\mathbf{x}_k$  から、対象とするカオスシステムの高木・菅野のファジモデルを得ることができる。バックプロパゲーション・アルゴリズムを適用して、ファジシステムにおける前件部メンバーシップ関数のパラメータと後件部線形帰帰式の状態変数  $\mathbf{x}_{ik}$  の係数パラメータの学習が可能である[1, 12, 14, 15]。

カオス系のエルゴード性を用いたカオス制御であるDFC法、PFC法やOGY法を用いることが出来る。DFC法はシステムの状態に基づいて制御入力を設計するため、OGY法より比較的容易に用いることができる。また、OGY法やPFC法などと比較してロバストである。しかし、UPOの各不安定周期点の近傍における線形化システムを用いて制御入力ゲインを決定するため、線形化システムが奇数条件

の制約を受ける場合は、安定可能なフィードバックゲインは存在しない。そして、奇数条件の欠点を補うためにDFC法を改良したPFC法では、制御入力設計で用いる状態の予測値の誤差が問題となる [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]。

未知システムのカオス的な性質を利用して、OGY法やPFC法により未知システムの状態をUPOに安定化する場合、正確なカオス軌道の予測手段が問題となる。またDFC法には奇数条件の制約が存在し、いつでも適用できるとは限らない。そして、DFC法やPFC法では、制御入力のパラメータ値の決定法が問題となる。一方、NNを用いることにより未知システムの時系列データ  $x_k$  から対象とするカオスシステムのカオス軌道の予測はある程度可能である。同様にFNNを用いた場合には、システムの状態の予測値のみならず同時にファジィモデルが得られているので、これを数学モデルの近似として用いることができる。

一方、既知システムに対するハイブリッド型制御法では、正確な不安定周期点を導出できなくても、その近傍領域が決定できればカオスシステムを安定にすることが可能である。さらに、DFC法のように奇数条件の制約を受けない [3, 12, 15]。

したがって、DFC法とPFC法に基づいたハイブリッド型の(P-DFC)を用い、未知システムの状態  $x_k$  を  $\tau$  周期のUPOの各不安定周期点に安定化する。制御入力で用いる状態の予測値と制御入力パラメータは、対象とする未知カオスシステムのファジィモデルから解析的に求める。制御入力は、状態  $x_k$  がUPOの各不安定周期点の近傍に接近するときのみ印加する。時系列  $x_k$  より構成されたストレンジアトラクタに埋め込まれたUPOの各不安定周期点の近傍領域は、未知システムのカオス的な周回性に注目した不安定周期領域(UPR)の概念を用いて、時系列データ  $x_k$  を用いて探索する。予め求めたUPRを、目標とする周期  $\tau$  のUPOの各不安定周期点の近傍領域の近似とし

て用い、未知システムの状態  $x_k$  を各不安定周期点に安定化させる。

## 6 状態依存・時変のファジィモデル

対象とするファジィモデルは、FNNによって得られる高木・菅野のファジィモデルである。重複を許して  $p$  個にファジィ分割した各々の領域に対し、式 (14) のIF-THEN型のルール  $L^i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) を用いて未知システムの特徴を表現する [15]。

$$\begin{aligned}
 L^i: \quad \text{IF} \quad & x_{1k} \text{ is } M_1^i, \quad x_{2k} \text{ is } M_2^i, \quad \dots, \\
 & \text{and } x_{mk} \text{ is } M_m^i \\
 \\
 \text{THEN} \quad & x_{1(k+1)}^i = a_{10}^i + a_{11}^i x_{1k} + a_{12}^i x_{2k} \\
 & + \dots + a_{1m}^i x_{mk} + b^i u_k \\
 & x_{2(k+1)}^i = a_{20}^i + a_{21}^i x_{1k} + a_{22}^i x_{2k} \\
 & + \dots + a_{2m}^i x_{mk} \\
 & \vdots \\
 & x_{m(k+1)}^i = a_{m0}^i + a_{m1}^i x_{1k} + a_{m2}^i x_{2k} \\
 & + \dots + a_{mm}^i x_{mk}
 \end{aligned} \tag{14}$$

ここで、式 (13) の状態ベクトル  $x_k$  の  $m$  個の要素として得られる前件部の  $x_{jk} \in \mathcal{R}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) と後件部の  $x_{j(k+1)}^i \in \mathcal{R}$  は、ファジィシ変数である未知システムの状態である。そして、 $M_j^i$  はルール  $L^i$  における前件部の各状態変数  $x_{jk}$  のラベルを表現するファジィ集合である。そして、ファジィモデル後件部の線形回帰式は制御入力  $u_k \in \mathcal{R}$  を含むARXモデルで、 $u_k$  は  $x_{1(k+1)}^i$  の第一式にのみ付加されるとする。各ルール  $L^i$  に対する適合度  $\mu^i(x_k)$  は、式 (15) のように前件部の各状態変数  $x_{jk}$  に対するメンバーシップ値  $M_j^i(x_{jk})$  の積で表される。

$$\mu^i(\mathbf{x}_k) = \prod_{j=1}^m M_j^i(x_{jk}) \quad (15)$$

そして、各ルール  $L^i$  正規化された適合度  $\rho^i(\mathbf{x}_k)$  は、式 (16) を用いて得ることができる。

$$\rho^i(\mathbf{x}_k) = \frac{\mu^i(\mathbf{x}_k)}{\sum_{i=1}^p \mu^i(\mathbf{x}_k)} \quad (16)$$

式 (13) の状態変数ベクトル  $\mathbf{x}_k$  が与えられたとき、式 (16) を用いて各ルール後件部の線形回帰式を加重平均するファジィ推論の結果として、式 (17), (18), (19) に示す状態依存で時変型の係数をもつ区分線形の非線形状態方程式であるファジィモデルが得られる。

$$\begin{aligned} x_{1(k+1)} &= \sum_{i=1}^p \rho^i(\mathbf{x}_k) (a_{10}^i + a_{11}^i x_{1k} + a_{12}^i x_{2k} \\ &\quad + \cdots + a_{1m}^i x_{mk} + b^i u_k) \\ &= a_{10}(\mathbf{x}_k) + a_{11}(\mathbf{x}_k) x_{1k} + a_{12}(\mathbf{x}_k) x_{2k} \\ &\quad + \cdots + a_{1m}(\mathbf{x}_k) x_{mk} + b(\mathbf{x}_k) u_k \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} x_{2(k+1)} &= a_{20}(\mathbf{x}_k) + a_{21}(\mathbf{x}_k) x_{1k} + a_{22}(\mathbf{x}_k) x_{2k} \\ &\quad + \cdots + a_{2m}(\mathbf{x}_k) x_{mk} \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x_{m(k+1)} &= a_{m0}(\mathbf{x}_k) + a_{m1}(\mathbf{x}_k) x_{1k} + a_{m2}(\mathbf{x}_k) x_{2k} \\ &\quad + \cdots + a_{mm}(\mathbf{x}_k) x_{mk} \end{aligned} \quad (19)$$

式 (17), (18), (19) を係数行列と係数ベクトルを用いて式 (20) のように書き改める。

$$\mathbf{x}_{k+1} = A(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k + B(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_k + \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) \quad (20)$$

ここで、システム行列  $A(\mathbf{x}_k) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  は式 (21) で、入力ベクトル  $B(\mathbf{x}_k) \in \mathcal{R}^{m \times l}$  は式 (22) で、制御入力  $\mathbf{u}_k \in \mathcal{R}^l$  は式 (23) で、そして定数ベクトル  $\mathbf{a}(\mathbf{x}_k) \in \mathcal{R}^m$  は式 (24) で、それぞ

れ表される。

$$A(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}_k) & a_{12}(\mathbf{x}_k) & \cdots & a_{1m}(\mathbf{x}_k) \\ a_{21}(\mathbf{x}_k) & a_{22}(\mathbf{x}_k) & \cdots & a_{2m}(\mathbf{x}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(\mathbf{x}_k) & a_{m2}(\mathbf{x}_k) & \cdots & a_{mm}(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$B(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} b(\mathbf{x}_k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{u}_k = [u_k \ 0 \ \cdots \ 0]^T \quad (23)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_k) = [a_{10}(\mathbf{x}_k) \ a_{20}(\mathbf{x}_k) \ \cdots \ a_{m0}(\mathbf{x}_k)]^T \quad (24)$$

## 7 提案手法

対象とするシステムが未知で **PFC** を用いることができず、さらに奇数条件を満たし **DFC** によって安定化できない場合に、これらの影響を受けないカオス制御法を提案する。

### 7.1 不安定周期領域 (UPR) の設定

未知カオスシステムのファジィモデルから **UPO** の各不安定周期点における状態方程式を求めたり、カオス制御入力を未知システムに印加する際に必要な各不安定周期点の近傍を探索するには、式 (13) の時系列  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^m$  を用いて得ることができる不安定周期領域 (**UPR**) が必要である。**UPR** は状態空間内における  $m$  次元のストレンジアトラクタを構成するカオス軌道の推移から算出することができ、**UPO** の周期と軌道に関する情報を示す。いま、未知システムの状態ベクトル  $\mathbf{x}_k$  の  $N$  個の時系列が予

め得られているとする。式 (13) の  $\mathbf{x}_k$  は、カオスシステムのエルゴード性により  $\tau$  周期の **UPO** の  $\tau$  個の各不安定周期点に必ず接近し、その前後に数回に渡り各周期点の近傍を通過する。よって、軌道データ  $\mathbf{x}_k$  から、式 (25) の条件を満たす  $\{\mathbf{x}_{(\gamma-1)\tau}, \mathbf{x}_{\gamma\tau}\}$  のペアを出来るだけ多く算出する。

$$\begin{cases} \|\mathbf{x}_{(\gamma-1)\tau} - \mathbf{x}_{\gamma\tau}\| < \varepsilon \\ \varepsilon < \delta < \|\mathbf{x}_{\gamma\tau-\beta} - \mathbf{x}_{\gamma\tau}\| \end{cases} \quad (25)$$

ここで、 $\gamma = 2, 3, \dots, N$  であり、また  $\beta = 2, 3, \dots, \tau-1$  である。そして、 $\varepsilon$  は周期  $\tau$  の **UPO** が周回性を及ぼす  $\tau$  個の各不安定周期点の近傍領域の大きさの許容範囲を示す十分に小さな正の実数であり、 $\delta$  は  $\varepsilon$  の数倍程度の大きさとする。算出されたデータ  $\mathbf{x}_k$  がなす各クラスタが示す状態空間内の領域が **UPR** である。 $\tau$  を変化させて式 (25) の条件を満たすデータ  $\mathbf{x}_k$  の組を求めることにより、何周期の **UPR** でも算出可能である [13]。

ただし、式 (25) より得られる  $\tau$  周期の **UPR** とは、低周期の **UPR** を含んだものである。つまり、4 周期の場合なら 1, 2 周期の **UPR** を含んでおり、6 周期の場合なら 1, 2, 3 周期の **UPR** を含んでいる。したがって、 $\tau$  周期の **UPO** の各不安定周期点を求める場合には、 $\tau$  の約数の周期をもつ **UPR** を予め 1 周期から全て算出しておき取り除くようにする。この **UPR** の重心ベクトル  $\mathbf{c}^\xi$  ( $\xi = 1, 2, \dots, \tau$ ) を **UPO** の各不安定周期点の近似値として用いる。

さらに、低周期の **UPR** を除いた  $\tau$  周期の **UPR** が  $\tau \times g$  個あるときは、 $g$  個の  $\tau$  周期 **UPR** が算出されている場合である。このときは、カオス制御において、任意のクラスタに属する重心ベクトル  $\mathbf{c}^\xi$  ( $g = 1, 2, \dots, \tau g$ ) に制御することを各クラスタにおいて繰り返し、 $g$  個の  $\tau$  周期 **UPR** を順次を特定していく。このタイプの制御法は、 $\tau$  イテレーションごとに ( $\tau$

ステップに一回) 制御入力を印加する方法で収束が遅いので、複数ある  $\tau$  周期 **UPR** を特定するときのみ用いる (完全に安定化しなくても、各クラスタが  $g$  個の  $\tau$  周期 **UPR** のうち、どれに属するか区別できればよい)。よって、制御対象のカオスシステムの非線形性が高い場合や目標 **UPO** の周期が大きい場合などに有効であるように、 $\tau$  周期 **UPO** の  $\tau$  個の不安定  $\tau$  周期点のそれぞれを制御目標点として扱い、それぞれの **UPR** の  $\mathbf{c}^\xi$  において制御入力を更新する方法を用いる。

## 7.2 ファジィモデルを用いた制御入力的设计

ストレンジアトラクタを構成する未知システムの  $m$  次元の状態ベクトル  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^m$  は式 (26) である。

$$\mathbf{x}_k = [x_{1k} \ x_{2k} \ \dots \ x_{mk}]^T \quad (26)$$

そして、未知システムに対する提案手法 (**P-D FC**) のハイブリッド型カオス制御入力  $\mathbf{u}_k \in \mathcal{R}^{l \times m}$  を式 (27) とする。

$$\mathbf{u}_k = \begin{cases} (1 - w_k)\mathbf{u}_k^P + w_k\mathbf{u}_k^D & \text{if } r_k < \varepsilon \\ \mathbf{0} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (27)$$

式 (27) は、**PFC** と **DFC** に基づく制御入力である。

ここで、 $\mathbf{u}_k^D$  は式 (28) で表される **DFC** に相当する部分入力で、 $\tau$  時刻過去の状態ベクトルと現在の状態ベクトルとの誤差に基づいている。

$$\mathbf{u}_k^D = K_k(\mathbf{x}_{k-\tau} - \mathbf{x}_k) \quad (28)$$

一方、 $\mathbf{u}_k^P$  は式 (29) で表される **PFC** に相当する部分入力で、 $\tau$  時刻あとの未来の状態ベクトルの予測値  $\hat{\mathbf{x}}_{k+\tau} \in \mathcal{R}^m$  と現在の状態ベクトル  $\mathbf{x}_k$  との誤差に基づいて設計する。

$$\mathbf{u}_k^P = K_k(\hat{\mathbf{x}}_{k+\tau} - \mathbf{x}_k) \quad (29) \qquad r_k = \|\mathbf{c}_k - \mathbf{x}_k\| \quad (33)$$

ここで、 $\tau$ 時刻あとの各状態の予測値を  $\hat{\mathbf{x}}_{j(k+\tau)} \in \mathcal{R}$  ( $j=1, 2, \dots, m$ )とおき、式 (29) の予測値  $\hat{\mathbf{x}}_{k+\tau}$ を式 (30) のように表す。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+\tau} = [\hat{x}_{1(k+\tau)} \ \hat{x}_{2(k+\tau)} \ \dots \ \hat{x}_{m(k+\tau)}]^T \quad (30)$$

式 (27) のパラメータ  $w_k \in \mathcal{R}$  は  $\mathbf{u}_k^P$  と  $\mathbf{u}_k^D$  のバランスを決める重みを表し、 $0 \leq w_k \leq 1$  の間の実数値を採る。したがって、 $w_k=0$  のときは **PFC** のみ、 $w_k=1$  のときは **DFC** のみの制御となる。そして、式 (28), (29) の  $K_k \in \mathcal{R}^{l \times m}$  は式 (31) のフィードバックゲイン行列であり、 $\mathbf{u}_k^P$  と  $\mathbf{u}_k^D$  共通のものとする。

$$K_k = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_k^1 & \mathcal{K}_k^2 & \dots & \mathcal{K}_k^{m-1} & \mathcal{K}_k^m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで、式(31)の  $\mathcal{K}_k^i \in \mathcal{R}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) は、フィードバックゲインである。

各 **UPR** の領域内には **UPO** の各不安定周期点が存在し、式(27)の操作量である式(28), (29) は各不安定周期点の近傍で印加すればよいが、不安定周期点は未知である。よって、各 **UPR** を各不安定周期点の近傍領域として使い、各 **UPR** の大きさは共通の  $\varepsilon$  と限定する。ここで、 $\mathbf{x}_k$  の近傍にある **UPR** の重心ベクトル  $\mathbf{c}_k \in \mathcal{R}^m$  を式 (32) とする。

$$\mathbf{c}_k = [c_k^1 \ c_k^2 \ \dots \ c_k^m]^T \quad (32)$$

また、式 (27) の  $r_k$  は式 (33) に示すように、式 (32) の  $\mathbf{c}_k \in \mathcal{R}^m$  と現在の状態ベクトル  $\mathbf{x}_k$  との誤差に基づく状態ベクトルのノルムである。

ここで、 $\mathbf{c}_{k-\tau} = \mathbf{c}_k$  である。したがって、式(27) に示すように、操作量はカオスシステムの状態ベクトル  $\mathbf{x}_k$  が  $\tau$ 個の各 **UPR** に遷移したときのみ印加する。

### 7.2.1 制御入力で用いる状態の予測値

式 (27) の制御入力で用いる式 (29) の未来の状態ベクトルの予測値  $\hat{\mathbf{x}}_{k+\tau} \in \mathcal{R}^m$  は、式(20) のファジィモデルを用いて現在の状態ベクトル  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^m$  から決定する。

いま、**UPO** の周期が  $\tau=1$  のときは、式 (20) から制御入力を  $\mathbf{u}_k = 0$  として取り除いた式 (34) を用いるとする。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = A(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k + \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) \quad (34)$$

そして  $\tau=2$  のときは、式 (34) を繰り返して用いた式 (35) を用いることにする。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+2} &= A(\mathbf{x}_{k+1})\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{a}(\mathbf{x}_{k+1}) \\ &= A(\hat{\mathbf{x}}_{k+1})\hat{\mathbf{x}}_{k+1} + \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \\ &= A(\hat{\mathbf{x}}_{k+1})A(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k + A(\hat{\mathbf{x}}_{k+1})\mathbf{a}(\mathbf{x}_k) \\ &\quad + \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \end{aligned} \quad (35)$$

ただし、式 (35) の  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  には式 (34) を用いる。式(35)と同様に、 $\tau=3$  のときは式(36)、 $\tau=4$  のときは式 (37) とする。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+3} &= A(\mathbf{x}_{k+2})\mathbf{x}_{k+2} + \mathbf{a}(\mathbf{x}_{k+2}) \\ &= A(\hat{\mathbf{x}}_{k+2})\hat{\mathbf{x}}_{k+2} + \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_{k+2}) \\ &= A(\hat{\mathbf{x}}_{k+2})A(\hat{\mathbf{x}}_{k+1})A(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k \\ &\quad + A(\hat{\mathbf{x}}_{k+2})A(\hat{\mathbf{x}}_{k+1})\mathbf{a}(\mathbf{x}_k) \\ &\quad + A(\hat{\mathbf{x}}_{k+2})\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \\ &\quad + \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_{k+2}) \end{aligned} \quad (36)$$



$$\begin{aligned}
 \hat{\boldsymbol{x}}_{k+4} &= A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+3})\hat{\boldsymbol{x}}_{k+3} + \boldsymbol{a}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+3}) \\
 &= A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+3})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+2})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1})A(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{x}_k \\
 &\quad + A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+3})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+2})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}_k) \\
 &\quad + A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+3})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+2})\boldsymbol{a}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}) \\
 &\quad + A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+3})\boldsymbol{a}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+2}) \\
 &\quad + \boldsymbol{a}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+3})
 \end{aligned} \tag{37}$$

したがって、**UPO** の周期  $\tau = n$  のときの状態ベクトルの予測値は、式 (34) を  $n$  回ほど繰り返して用いた式 (38) のようになる。

$$\begin{aligned}
 \hat{\boldsymbol{x}}_{k+n} &= A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-1})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-2}) \\
 &\quad \cdots A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+2})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1})A(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{x}_k \\
 &\quad + A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-1})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-2}) \\
 &\quad \cdots A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+2})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}_k) \\
 &\quad + A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-1})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-2}) \\
 &\quad \cdots A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+2})\boldsymbol{a}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-1})A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-2})\boldsymbol{a}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-3}) \\
 &\quad + A(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-1})\boldsymbol{a}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-2}) \\
 &\quad + \boldsymbol{a}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n-1})
 \end{aligned} \tag{38}$$

式 (38) で予測値  $\hat{\boldsymbol{x}}$  を現在や既知の過去の状態ベクトルと同様に  $\boldsymbol{x}$  と表現すると、式 (38) は式 (39) のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{x}_{k+n} &= \prod_{h=1}^n A(\boldsymbol{x}_{k+h-1})\boldsymbol{x}_k \\
 &\quad + \sum_{g=1}^{n-1} \left\{ \prod_{d=g}^{n-1} A(\boldsymbol{x}_{k+d})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}_{k+g-1}) \right\} \\
 &\quad + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}_{k+n-1})
 \end{aligned} \tag{39}$$

式(39)の右辺は  $n = 1$  のときは成り立たず、 $n = 2, 3, 4$  のときは式 (35), (36), (37) の

右辺と一致する。

よって、式 (29) の状態ベクトルの予測値  $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+\tau} \in \mathcal{R}^m$  は、**UPO** の周期 が  $\tau = 1$  のときには式 (34) を用い、 $\tau \geq 2$  のときは式 (40) を用いる。

$$\begin{aligned}
 \hat{\boldsymbol{x}}_{k+\tau} &= \prod_{h=1}^{\tau} A(\boldsymbol{x}_{k+h-1})\boldsymbol{x}_k \\
 &\quad + \sum_{g=1}^{\tau-1} \left\{ \prod_{d=g}^{\tau-1} A(\boldsymbol{x}_{k+d})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}_{k+g-1}) \right\} \\
 &\quad + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}_{k+\tau-1})
 \end{aligned} \tag{40}$$

ただし、式 (40) の右辺において時刻  $k+1$  以上の状態ベクトル  $\boldsymbol{x}$  は予測値を表し、式 (34) や式 (40) 自身を繰り返して用いる。そして、得られた式 (34) あるいは式 (40) のベクトルの要素を式 (30) の各状態とする。

## 7.2.2 ゲイン行列とバランス・パラメータの設定

式 (27), (28), (29) より、制御入力  $\boldsymbol{u}_k \in \mathcal{R}^l$  は式 (41) となる。

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{u}_k &= (1 - w_k)K_k(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+\tau} \\
 &\quad - \boldsymbol{x}_k) + w_k K_k(\boldsymbol{x}_{k-\tau} - \boldsymbol{x}_k)
 \end{aligned} \tag{41}$$

式 (41) のバランスパラメータの  $w_k \in \mathcal{R}$  とフィードバックゲイン行列  $K_k \in \mathcal{R}^{l \times m}$  を決定するため、ファジィモデルに対する  $\boldsymbol{u}_k \in \mathcal{R}^l$  を考える。

式 (34), 式 (40) より、状態ベクトル  $\boldsymbol{x}_k \in \mathcal{R}^m$  が各 **UPR** 内に在るときは  $\boldsymbol{c}_k \in \mathcal{R}^m$  の近傍にあると考え、式 (41) の状態ベクトルの予測値  $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+\tau}$  として式 (42) あるいは式 (43) を用いる。

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = A(\boldsymbol{c}_k)\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}_k) \quad (\tau = 1) \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+\tau} = & \prod_{h=1}^{\tau} A(c_{k+h-1})x_k \\ & + \sum_{g=1}^{\tau-1} \left\{ \prod_{d=g}^{\tau-1} A(c_{k+d})a(c_{k+g-1}) \right\} \\ & + a(c_{k+\tau-1}) \quad (\tau \geq 2) \end{aligned} \quad (43)$$

式(41)の  $u_k \in \mathcal{R}^l$  を用いた式(20)のフアジイモデルを求める。状態ベクトル  $x_k \in \mathcal{R}^m$  が  $c_k \in \mathcal{R}^m$  に在るとき、式(20)は式(44)となる。

$$x_{k+1} = A(c_k)x_k + B(c_k)u_k + a(c_k) \quad (44)$$

そして、式(42)あるいは式(43)を用いた式(44)を式(45)とする。

$$x_{k+1} = E_k^1 x_k + E_k^2 x_{k-\tau} + e_k^0 \quad (45)$$

ここで、式(45)の  $E_k^1 \in \mathcal{R}^{m \times m}$ ,  $E_k^2 \in \mathcal{R}^{m \times m}$ ,  $e_k^0 \in \mathcal{R}^m$  は、**UPO**の周期が  $\tau = 1$  の場合は式(46)を表し、 $\tau \geq 2$  の場合は式(47)を表すとする。

$$\begin{cases} E^1 = A(c_k) - wB(c_k)K \\ \quad + (1-w)B(c_k)K \{ A(c_k) - I_m \} \\ E^2 = wB(c_k)K \\ e^0 = (1-w)B(c_k)K a(c_k) + a(c_k) \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} E_k^1 = A(c_k) - w_k B(c_k) K_k \\ \quad + (1-w_k) B(c_k) K_k \left\{ \prod_{h=1}^{\tau} A(c_{k+h-1}) - I_m \right\} \\ E_k^2 = w_k B(c_k) K_k \\ e_k^0 = (1-w_k) B(c_k) K_k \left[ \sum_{g=1}^{\tau-1} \left\{ \prod_{d=g}^{\tau-1} A(c_{k+d}) a(c_{k+g-1}) \right\} + a(c_{k+\tau-1}) \right] + a(c_k) \end{cases} \quad (47)$$

ただし、周期  $\tau = 1$  の場合は  $c_k = c_{k+1} = \dots$  となり、式(41)の  $w_k \in \mathcal{R}$  と  $K_k \in \mathcal{R}^{l \times m}$ , および式(45)の  $E_k^1, E_k^2, e_k^0$  は時間に依存しないため、 $w, K, E^1, E^2, e^0$  と表現している。したがって、式(45)の区分線状態方程式において、誤差ベクトルを式(48)の  $\bar{x}_k \in \mathcal{R}^m$  とおくと、 $c_k \in \mathcal{R}^m$  近傍における線形化システムは式(49)となる。

$$\bar{x}_k = x_k - c_k \quad (48)$$

$$\bar{x}_{k+1} = E_k^1 \bar{x}_k + E_k^2 \bar{x}_{k-\tau} + e_k^p \quad (49)$$

ここで、式(49)の定数ベクトル  $e_k^p \in \mathcal{R}^m$  は式(50)となる。

$$e_k^p = E_k^1 c_k + E_k^2 c_{k-\tau} + e_k^0 - c_{k+1} \quad (50)$$

式(49)において  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k \rightarrow 0$  となるように、式(51)の  $c_k$  近傍における線形拡大システムを考える。

$$\bar{X}_{k+1} = \bar{A}_k \bar{X}_k \quad (51)$$

ここで、式(51)の  $\bar{X}_k \in \mathcal{R}^{\{m \times (\tau+1)\} \times 1}$  は式(52)の状態ベクトルを表し、また  $\bar{A}_k \in \mathcal{R}^{\{m \times (\tau+1)\} \times \{m \times (\tau+1)\}}$  は式(53)の拡大システム行列を表す。

$$\bar{X}_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_k^T & \bar{x}_{k-1}^T & \dots & \bar{x}_{k-\tau}^T \end{bmatrix}^T \quad (52)$$

$$\bar{A}_k = \begin{bmatrix} E_{1k} & 0 & \dots & 0 & E_{2k} \\ & & & & \mathbf{0} \\ & & & & \vdots \\ & & & I_{m \times \tau} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (53)$$

したがって、既知システムに対する手法と同様に、式(53)の  $\bar{A}_k$  の特性方程式に **Jury** の安

定判別法を適用し、式 (51) の  $c_k$  近傍における線形化システムが  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{X}_k \rightarrow 0$  と安定になるように、式 (41) の制御入力のバランス・パラメータの  $w_k \in \mathcal{R}$  とフィードバックゲイン行列  $K_k \in \mathcal{R}^{l \times m}$  の要素であるフィードバックゲイン  $\mathcal{K}_k^i \in \mathcal{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) を決定する [3, 16]。

一般に、式 (51) の各  $c_k$  近傍における  $\bar{A}_k$  に対して、単独にフィードバックゲイン行列  $K_k \in \mathcal{R}^{l \times m}$  を設定しても、 $\tau$  周期の周期係数を持つ式 (51) の線形システムを安定化できるとは限らない。そこで、時刻  $k$  における UPO の重心ベクトル  $c_k$  を  $c^1$  と考え、各時刻  $k, k-1, k-2, \dots, k-\tau+1$  における  $\tau$  個の重心ベクトルを  $c^1, c^2, \dots, c^\tau$ 、その近傍における拡大システム行列を  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_\tau$  とする。このとき、式 (51) が安定となるための必要十分条件は、式 (54) のシステム行列  $\Phi$  が安定行列となることであることが文献 [17] に示されている。

$$\begin{aligned} \Phi &= \bar{A}_k \bar{A}_{k-1} \cdots \bar{A}_{k-\tau+1} \\ &= \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_\tau \end{aligned} \quad (54)$$

したがって、式 (51) の  $\bar{A}_k$  に対して単独に  $K_k \in \mathcal{R}^{l \times m}$  を設定しても式 (51) を安定化できないときは、ファジィモデルによって得られた式 (54) のシステム行列  $\Phi$  の特性方程式に対して **Jury** の方法を適用してパラメータ  $w$  と  $K$  を決定し、式 (51) の各重心ベクトル  $c^1, c^2, \dots, c^\tau$  近傍における線形化システムが安定になるようにする。

### 7.2.3 評価関数を用いた組 $(w, \mathcal{K}^i)$ の決定

式 (56) から得られたファジィモデルの線形化システムに **Jury** の方法を適用して得られたパラメータの領域  $w_j - \mathcal{K}_j^i$  ( $j = 1, 2, \dots, \tau$ ) ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) から、さらにパラメータの組  $(w_j, \mathcal{K}_j^i)$  を決定する場合には、各領域

$w_j - \mathcal{K}_j^i$  に属する各パラメータの組  $(w_j, \mathcal{K}_j^i)$  を用いた元のファジィモデルの出力に式 (55) の評価関数を適用して算出する制御システムの評価値を用いる [3, 16]。

$$Eva = \frac{1}{\sum_{k=k_c}^{k_g} \{ r_k + v \| u_k \| \}} \quad (55)$$

ここで、 $k_c$  は実験開始時刻、 $k_g$  はシステムが十分に安定した時刻、 $v$  は入力への寄与に関する重みである。式 (55) の評価関数は、制御入力  $u_k$  が印加されてからシステムの状態が安定するまでの期間において、状態と目標の誤差が小さいこと、そのときの入力  $u_k$  がなるべく小さいこと、そして制御時間が短いことなどを考慮した。制御入力  $u_k$  の各不安定周期点におけるパラメータ  $w_j$  と  $\mathcal{K}_j^1, \mathcal{K}_j^2, \dots, \mathcal{K}_j^m$  を各領域  $w_j - \mathcal{K}_j^i$  の範囲内で変化させ、ファジィモデルの出力に対する評価値によってパラメータ値を決定する。

## 8 シミュレーション

式 (56) で操作量を零とした二次元離散時間カオスシステムのエノン写像を繰り返し用い、初期値の影響がなくなった時系列データを自由系の未知システムからの出力と仮定して数値実験を行った。

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1.0 - 1.4x_k^2 + 0.3y_k + u_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases} \quad (56)$$

ここで、 $x_k \in \mathcal{R}$  と  $y_k \in \mathcal{R}$  はシステムの状態である。そして、 $u_k \in \mathcal{R}$  は加法的制御入力であり、 $u_k = 0$  のとき式 (56) はカオスを発生する。また、 $u_k \neq 0$  のときでも、その大きさが小さいならば、ストレンジアトラクタには歪が生じるがカオス性は未だ保持するとする。

簡単のため、観測される二次元の状態ベクトル  $[x_k \ y_k]^T$  の要素が時間おくれ、すなわち  $y_k = x_{k-1}$  であることは既知であり、一次元の時系列  $x_k$  から二次元のファジィモデルを構築できるとした。式 (56) の制御系のファジィモデルを得るため、操作量  $u(k)$  には DFC 法の制御入力を用い、そのときフィードバックゲインは  $K_d = -0.9$  とした。そして、式 (56) の状態ベクトルを、 $u_k = 0$  としたときの式 (56) の不安定不動点に安定化した制御過程の時系列データを得た。得られた時系列  $x_k \in \mathcal{R}$  用いて FNN の訓練を行い、式 (56) の未知システムのファジィモデルを得ることができた。

### 8.1 UPR の探索

$u_k = 0$  のときの式 (56) の未知システムの状態ベクトル 5000 個の時系列  $x_k \in \mathcal{R}^2$  を用いて、式 (25) の条件から、不安定周期領域 (UPR) を算出した。式 (25) のパラメータ  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\delta = 0.05$  とした。

図 1 に算出した周期 1 の UPR を示す。図 2 はエノン写像のストレンジアトラクタと算出した周期 1 の UPR を重ねて示したものである。つぎに、図 3 に算出した周期 2 の UPR を、そして図 4 にストレンジアトラクタと周期 2 の UPR を重ねたものを示す。ただし、図 3 と図 4 の 2 周期の UPR は、1 周期の UPR を含んだものである。したがって、図 3、図 4 の UPR から図 1、図 2 の 1 周期の UPR を取り除いて 2 周期の UPR としたものを図 5 に示す。図 6 はストレンジアトラクタと抽出した周期 2 の UPR を重ねて示したものである。

そして、UPO の各不安定周期点の近傍領域として算出した各 UPR から、周期 1 の UPR の重心ベクトル  $c_f = [0.63 \ 0.63]^T$  と周期 2 の UPR の重心ベクトル  $c_p^1 = [c^1 \ c^2]^T$ ,  $c_p^2 = [c^2 \ c^1]^T$  を求めた。ここで、 $(c^1, c^2) = (0.9758, -0.4758)$  である。また、図 7 はストレンジアトラクタと重心ベクトル  $c_p^1, c_p^2$  と

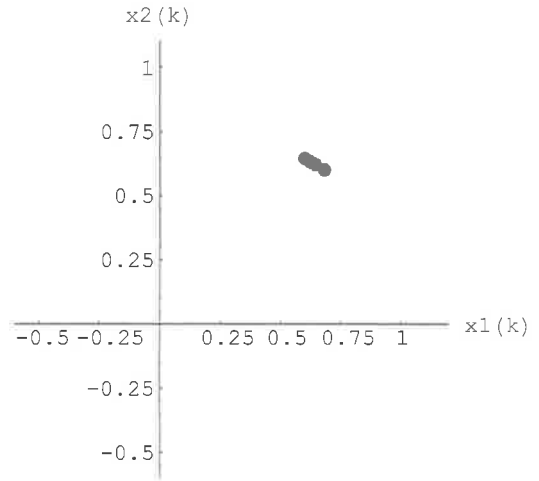


図 1: エノン写像の周期 1 の UPR

$c_f$  を重ねて示したものである。この UPR の重心ベクトル  $c^{\xi}$  ( $\xi = 1, 2$ ) および  $c_f$  を UPO の各不安定周期点および不安定不動点の近似値として用いる。ここで、図 7 の網掛けの円形部分は、制御のときに用いる各不安定周期点 (不安定不動点) の近傍領域を表したものである。

### 8.2 不安定不動点の安定

式 (56) から得られたファジィモデルに、不安定不動点の近傍として算出した UPR の重心ベクトル  $c_f = [c_f \ c_f]^T = [0.631 \ 0.631]^T$  を代入し、式 (57) の不安定不動点における区分線形状態方程式を得た。

$$x_{k+1} = -1.9511x_k + 0.1053x_{k-1} + 1.1090u_k + 1.8563 \quad (57)$$

式 (58) のように、式 (57) で  $a_1 = -1.9511$ ,  $a_2 = 0.1053$ ,  $b = 1.1090$ ,  $a_0 = 1.8563$  とおき、式 (59) の不安定不動点の近傍における線形化システムを求めた。

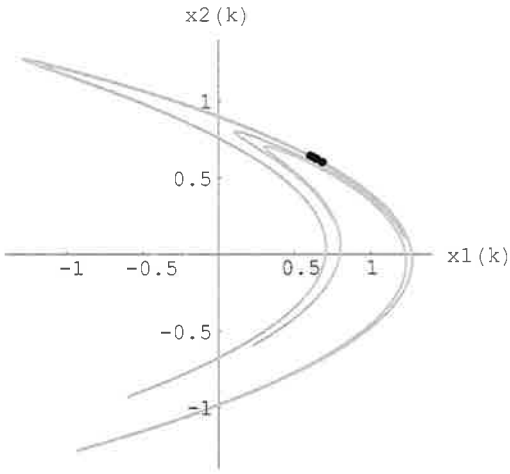


図 2: エノン写像のストレンジアトラクタと周期1のUPR

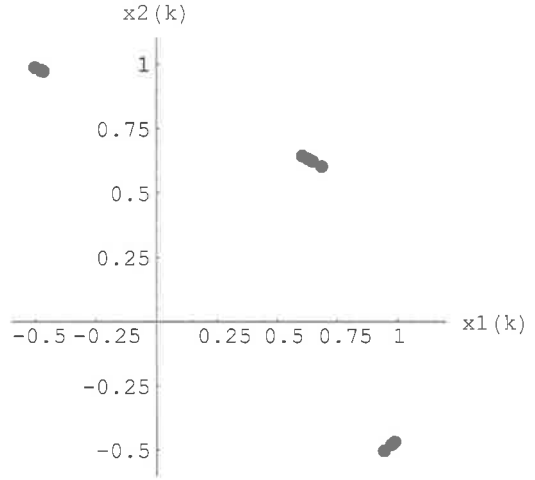


図 3: エノン写像の周期2のUPR

$$x_{k+1} = a_1 x_k + a_2 x_{k-1} + b u_k + a_0 \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

式 (58) より, 状態  $x_k \in \mathcal{R}$  の予測値  $\hat{x}_{k+1} \in \mathcal{R}$  として式 (60) を用いると, **P-DFC** 法に基づいた式 (59) の制御入力  $u_k \in \mathcal{R}$  は式 (61) となった。

$$\hat{x}_{k+1} = a_1 x_k + a_2 x_{k-1} + a_0 \quad (60)$$

$$\begin{aligned} u_k &= (1-w)\mathcal{K}(\hat{x}_{k+1} - x_k) \\ &+ w\mathcal{K}(x_{k-1} - x_k) \end{aligned} \quad (61)$$

ここで,  $w \in \mathcal{R}$  はバランスの重み,  $\mathcal{K} \in \mathcal{R}$  はフィードバックゲインである。

### 8.2.1 Jury の方法をファジィモデルに用いた結果

状態ベクトルと **UPO** の重心ベクトルとの誤差ベクトルを式 (62) とおき, 式 (61) の制御

入力  $u_k$  を用いると, 式 (59) より, 不安定不動点近傍における線形化システムは式 (63) のようになった。

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{x}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_f \\ c_f \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1} \\ \bar{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{x}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (63)$$

ここで, 式 (63) の  $e_1 \in \mathcal{R}, e_2 \in \mathcal{R}$  は式 (64), (65) を表す。

$$e_1 = b(1-w)\mathcal{K}a_1 + a_1 - b\mathcal{K} \quad (64)$$

$$e_2 = b(1-w)\mathcal{K}a_2 + a_2 + bw\mathcal{K} \quad (65)$$

したがって, 式 (63) のシステム行列の特性多項式は式 (66) となった。

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - e_1 & -e_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - e_1 \lambda - e_2 \end{aligned} \quad (66)$$

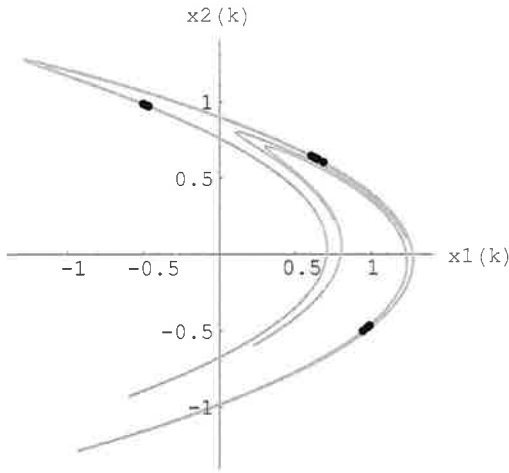


図4: エノン写像のストレンジアトラクタと周期2のUPR

式(66)に式(64), (65)を代入したのち、さらに式(66)の $a_1, a_2, b$ に元の数値を代入した。そのときの式(66)の特性方程式 $F(\lambda) = 0$ に、次元数 $m = 2$ としてJuryの安定判別法を適用し、式(63)の線形化システムが安定となるための条件である式(67), (68), (69)を得た。

$$F(1) = 2.8458 + 1.109\mathcal{K} + 2.04699(1-w)\mathcal{K} - 1.109w\mathcal{K} > 0 \quad (67)$$

$$\begin{aligned} (-1)^m F(-1) &= (-1)^2 F(-1) \\ &= -1.0564 - 1.109\mathcal{K} \\ &\quad - 2.28055(1-w)\mathcal{K} \\ &\quad - 1.109w\mathcal{K} > 0 \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} |-e_2| &= |-0.1053 - 0.116778(1-w)\mathcal{K} \\ &\quad - 1.109w\mathcal{K}| < 1 \end{aligned} \quad (69)$$

図8は、式(67), (68), (69)を満たす制御入力パラメータ $w$ と $\mathcal{K}$ の共通範囲を示して

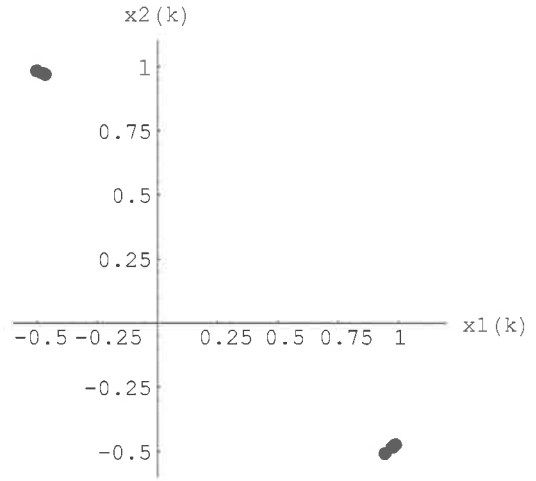


図5: エノン写像の周期2のUPR(周期1のUPRを除いたもの)

いる。図9に示すように、図8のパラメータの領域 $w\text{-}\mathcal{K}$ を、式(56)を既知システムとしてJuryの方法を適用した同様な数値実験結果の領域 $w\text{-}\mathcal{K}$ と比較すると、 $\mathcal{K}$ の範囲が少し狭まっただけで領域の形は殆ど同じである。

### 8.2.2 評価関数を用いた結果

式(61)の制御入力 $u_k$ の状態の予測値 $\hat{x}_{k+1}$ に、式(56)から得られたファジィモデルを用いた。そのときの式(56)の出力に式(55)の評価関数を適用し、制御システムの評価値を求めた。ここで、 $k_c$ は制御開始時刻、 $k_s$ はシステムが十分に安定した時刻である。 $v$ は入力の寄与に関する重みで、 $v = 0.1$ とした。

既知システムに対して行ったP-DFCの数値実験では、対象の線形化システムにJuryの方法を適用して制御入力の $w$ と $\mathcal{K}$ の範囲を判断した後、制御システムの安定性の目安となる式(55)の評価関数を、パラメータ $w$ と $\mathcal{K}$ を変えたときの既知システムの出力に適用した。得られた評価値を比較すると、安定化に有効なパラメータの値はJuryの方法から得られた領域 $w\text{-}\mathcal{K}$ よりも狭い範囲に属し、有効な範囲とそ

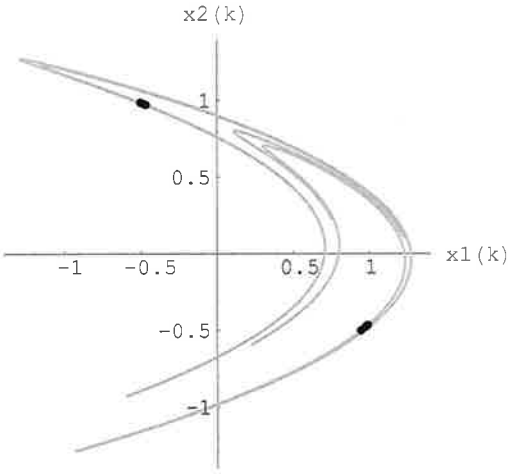


図 6: エノン写像のストレンジアトラクタと周期2の UPR (周期1の UPR を除いたもの)

うでない範囲とが明確に区別される際立った特長を有していた。よって、既知システムの結果を考慮に入れ、式 (56) から得られたファジィモデルに **Jury** の方法を適用して得られた領域  $w\text{-}\mathcal{K}$  の範囲で、式 (61) の制御入力  $u_k$  のパラメータ  $w$  と  $\mathcal{K}$  を変化させた式 (56) の未知システムからの出力に式 (55) の評価関数を適用し、パラメータの値を決定した。

不動点を安定化し、最大値 2.989, 最小値 1.560 となった評価の結果を図 10 に示す。

### 8.2.3 制御結果と制御入力の振舞い

式 (56) の制御入力  $u_k$  である式 (61) の予測値  $\hat{x}_{k+1}$  を未知システムのファジィモデルから決定し、ファジィモデルに **Jury** の方法を適用して解析的に得られた図 8 のパラメータの領域  $w\text{-}\mathcal{K}$  に属する制御入力パラメータの組  $(w, \mathcal{K}) = (0.5, -0.8)$  を用いて数値実験を行った結果、不安定不動点へのカオス制御が可能であった。不安定不動点に安定化された状態  $x_k$  の振舞いを図 11 に、そのときの制御入力  $u(k)$  の振舞いを図 12 に示す。なお、UPR の

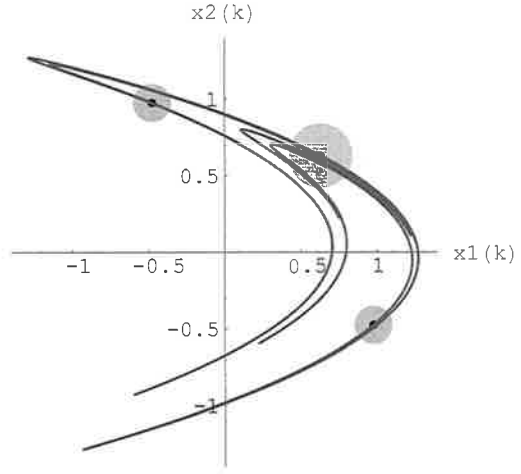


図 7: ストレンジアトラクタと周期2の UPR の重心ベクトル  $c_p^1, c_p^2$  と周期1の UPR の重心ベクトル  $c_f$  およびその近傍領域

大きさ  $\varepsilon = 0.1$  とした。

### 8.3 不安定二周期軌道の安定

エノン写像にカオス制御入力を付加した式 (56) の二次元離散時間システムの時系列データを未知システムからの出力と仮定して、**P-DFC** 法に基づいたカオス制御により 2 周期軌道を安定化する数値実験を行った。式 (56) の  $x_k \in \mathcal{R}$  と  $y_k \in \mathcal{R}$  はシステムの状態、そして  $u_k \in \mathcal{R}$  は制御入力であり、 $u_k = 0$  のときカオスが発生する。

**DFC** 法に基づいた  $u_k \in \mathcal{R}$  を用いて数回の予備実験を行い、式 (56) の状態ベクトルを 2 周期の **UPO** に安定化した。このとき、**DFC** のフィードバックゲインは、試行錯誤的に  $K_d^1 = -0.5, K_d^2 = 0.2$  と決定した。得られた制御過程の時系列データを用いて **FNN** の訓練を行い、未知システムのファジィモデルを得た。そして、 $u_k = 0$  とした式 (56) の時系列を用いて、**UPO** の各不安定周期点の近傍領域である各 **UPR** を計算した。算出した各

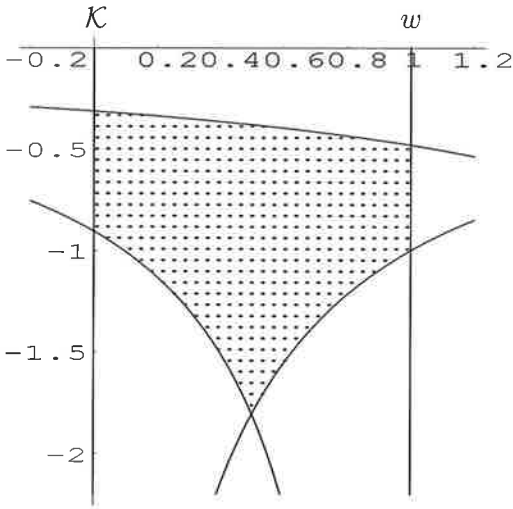


図 8: Jury の安定判別法によるパラメータの領域  $w$ - $\mathcal{K}$  (不安定不動点の場合)

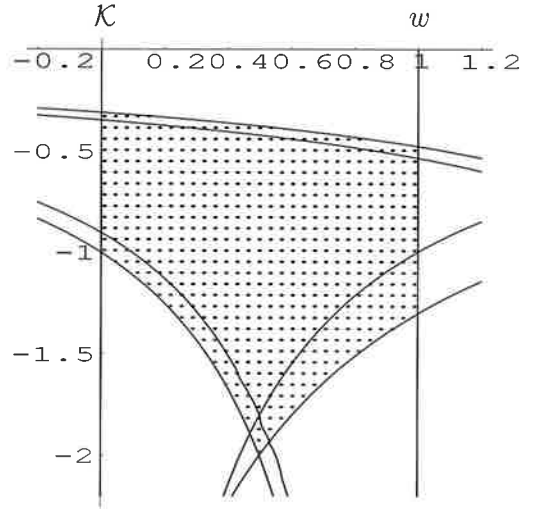


図 9: Jury の方法による領域  $w$ - $\mathcal{K}$  (不安定不動点の場合): 数学モデルとファジィモデルの比較

UPR から, 重心ベクトル  $\mathbf{c}_p^1 = [c^1 \ c^2]^T$ ,  $\mathbf{c}_p^2 = [c^2 \ c^1]^T$  を求めた。ここで,  $(c^1, c^2) = (0.9758, -0.4758)$  である。よって, 各重心ベクトルにおけるファジィモデルは式 (70) となった。

$$\begin{cases} x_{k+1} = a_0^1 + a_1^1 x_k + a_2^1 x_{k-1} + b^1 u_k^1 \\ \quad \quad \quad \text{for } \mathbf{c}_p^1 \\ x_{k+1} = a_0^2 + a_1^2 x_k + a_2^2 x_{k-1} + b^2 u_k^2 \\ \quad \quad \quad \text{for } \mathbf{c}_p^2 \end{cases} \quad (70)$$

ここで,  $a_0^1 = 2.0968$ ,  $a_1^1 = -2.5732$ ,  $a_2^1 = 0.3259$ ,  $b^1 = 1.0910$ ,  $a_0^2 = 1.2519$ ,  $a_1^2 = 1.5413$ ,  $a_2^2 = 0.4150$ ,  $b^2 = 0.8991$  である。式 (70) より, 制御入力  $u_k$  で用いる状態の予測値は式 (71) となった。

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+2}^1 = (a_1^1 a_1^1 + a_2^1) x_k + a_1^1 a_2^1 x_{k-1} \\ \quad \quad \quad + a_1^1 a_0^1 + a_0^1 \text{ for } \mathbf{c}_p^1 \\ \hat{x}_{k+2}^2 = (a_1^2 a_1^2 + a_2^2) x_k + a_1^2 a_2^2 x_{k-1} \\ \quad \quad \quad + a_1^2 a_0^2 + a_0^2 \text{ for } \mathbf{c}_p^2 \end{cases} \quad (71)$$

よって, フィードバックゲインを  $\mathcal{K}^1 \in \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{K}^2 \in \mathcal{R}$  として, P-DFC の制御入力  $u_k$  を式 (72) とおいた。

$$u_k = \begin{cases} u_k^1 = (1 - w^1) \mathcal{K}^1 (\hat{x}_{k+2}^1 - x_k) \\ \quad \quad \quad + w^1 \mathcal{K}^1 (x_{k-2} - x_k) \text{ for } \mathbf{c}_p^1 \\ u_k^2 = (1 - w^2) \mathcal{K}^2 (\hat{x}_{k+2}^2 - x_k) \\ \quad \quad \quad + w^2 \mathcal{K}^2 (x_{k-2} - x_k) \text{ for } \mathbf{c}_p^2 \end{cases} \quad (72)$$

### 8.3.1 Jury の方法をファジィモデルに用いた結果

状態と重心ベクトル  $\mathbf{c}_p^1$  の要素に基づき, 拡大システムの誤差ベクトルを式 (73) とした。



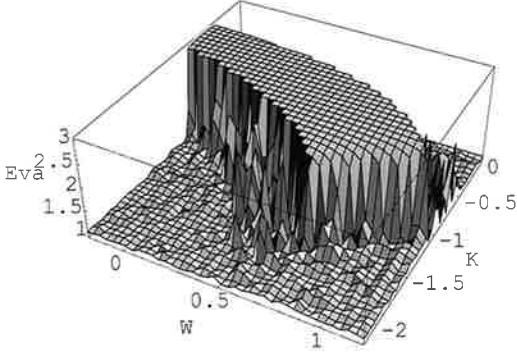


図 10: 未知システムに対する **P-DFC** において  $u_k$  の  $w$  と  $K$  を変化させたときの各システムの評価値  $Eva$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_k^1 \\ \bar{x}_{k-1}^1 \\ \bar{x}_{k-2}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^1 \end{bmatrix} \quad (73)$$

そして、式 (71) の状態の予測値  $\hat{x}_{k+2}^1$  に基づいた式 (72) の制御入力  $u_k^1$  を用いると、不安定周期点近傍における線形化システムのひとつは、式 (70) より、 $c_p^1$  近傍における拡大線形化システムとして式 (74) のように得られた。

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1}^1 \\ \bar{x}_k^1 \\ \bar{x}_{k-1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k^1 \\ \bar{x}_{k-1}^1 \\ \bar{x}_{k-2}^1 \end{bmatrix} \quad (74)$$

ここで、式 (74) の  $e_1^1 \in \mathcal{R}$  ,  $e_2^1 \in \mathcal{R}$  ,  $e_3^1 \in \mathcal{R}$  は式 (75) を表す。

$$\begin{cases} e_1^1 = a_1^1 + (1-w^1)b^1\mathcal{K}^1(a_1^2a_1^1 + a_2^2 - 1) \\ \quad - b^1w^1\mathcal{K}^1 \\ e_2^1 = a_2^1 + (1-w^1)b^1\mathcal{K}^1a_1^2a_1^1 \\ e_3^1 = b^1w^1\mathcal{K}^1 \end{cases} \quad (75)$$

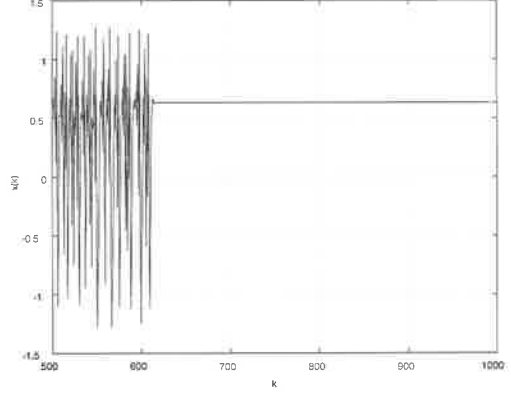


図 11: **P-DFC** 法によって不安定不動点に安定化された状態  $x_k$  の振舞い

したがって、式 (74) のシステム行列の特性多項式は式 (76) となった。

$$\begin{aligned} F^1(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - e_1^1 & -e_2^1 & -e_3^1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \alpha_3^1\lambda^3 + \alpha_2^1\lambda^2 + \alpha_1^1\lambda + \alpha_0^1 \end{aligned} \quad (76)$$

ここで、式(74)  $\alpha_3^1 \in \mathcal{R}$  ,  $\alpha_2^1 \in \mathcal{R}$  ,  $\alpha_1^1 \in \mathcal{R}$  ,  $\alpha_0^1 \in \mathcal{R}$  のは式 (77) を表す。

$$\begin{cases} \alpha_3^1 = 1 \\ \alpha_2^1 = -a_1^1 + b^1\mathcal{K}^1(1 - a_1^2a_1^1 - a_2^2) \\ \quad + w^1b^1\mathcal{K}^1(a_1^2a_1^1 + a_2^2) \\ \alpha_1^1 = -a_2^1 - b^1\mathcal{K}^1a_1^2a_2^1 + w^1b^1\mathcal{K}^1a_1^2a_2^1 \\ \alpha_0^1 = -w^1b^1\mathcal{K}^1 \end{cases} \quad (77)$$

式 (77) の  $a_1^1$  ,  $a_2^1$  ,  $b^1$  ,  $a_1^2$  ,  $a_2^2$  に元の数値を代入し、特性方程式  $F^1(\lambda) = 0$  に次元数  $m = 3$  として **Jury** の方法を適用した結果、式 (74) が安定となるための条件である式 (78) が得られた。

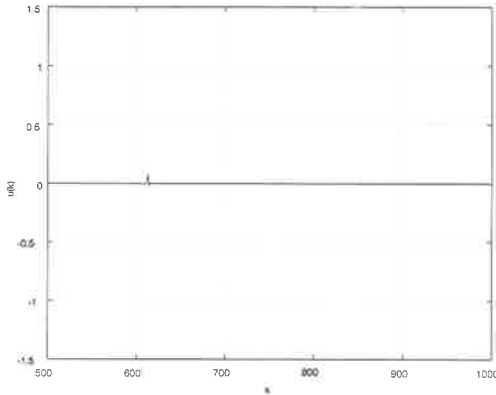


図 12: P-DFCを用いた制御システムのカオス制御  
入力  $u_k$  の振舞い

$$\left\{ \begin{array}{l} F^1(1) > 0 \\ (-1)^m F^1(-1) = (-1)^3 F^1(-1) > 0 \\ |\alpha_0^1| < \alpha_3^1 \\ |\gamma_0^1| < |\gamma_2^1| \end{array} \right. \quad (78)$$

ここで、式 (78) の  $\gamma_0^1 \in \mathcal{R}$  と  $\gamma_2^1 \in \mathcal{R}$  は、式 (79) の  $\gamma_n^1$  ( $m=3, n=0, 2$ ) を表す。

$$\gamma_n^1 = \det \begin{bmatrix} \alpha_0^1 & \alpha_{m-n}^1 \\ \alpha_m^1 & \alpha_n^1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

同様に、もう一つの UPO の重心ベクトル  $\alpha_p^2 = [c^2 \ c^1]^T$  の近傍における拡大線形化システム行列の特性方程式である式 (80) に Jury の方法を適用し、線形化システムが安定となるための条件を得た。

$$F^2(\lambda) = \alpha_3^2 \lambda^3 + \alpha_2^2 \lambda^2 + \alpha_1^2 \lambda + \alpha_0^2 = 0 \quad (80)$$

Jury の方法により得られた式 (78) の安定条件を満足する式 (72) の制御入力  $u_k^1$  のパラ

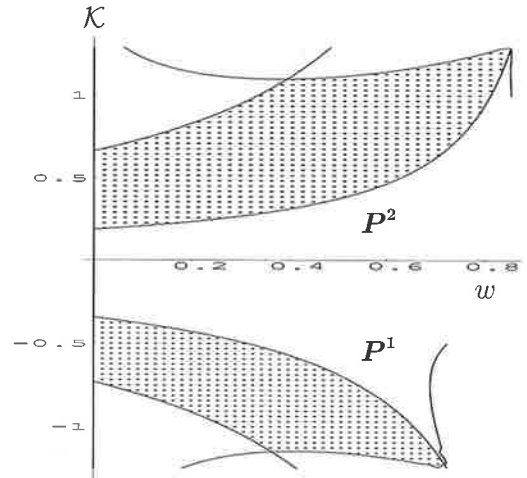


図 13: Jury の方法による領域  $w$ - $K$

メータの組  $(w^1, K^1)$  と、同様に式 (80) に基づき得られた式 (72) の  $u_k^2$  のパラメータの組  $(w^2, K^2)$  の領域を、同時に網掛け部分として図 13 に示す。ここで、図 13 は横軸にバランスの重み  $w$  を、そして縦軸にフィードバックゲイン  $K$  をとっている。式 (56) を既知システムにおいて行った同様な数値実験結果の  $w$ - $K$  領域を、図 13 の  $w$ - $K$  領域に重ねて表したものを図 14 に示す。式 (56) の数学モデルから得られた領域と式 (56) のファジィモデルから得られた領域の二つの結果を比較すると、範囲に少しのずれがあるものの、 $w$ - $K$  領域の形は殆ど同じになっており、かなり広い共通部分が存在する。

### 8.3.2 $\Phi$ を安定行列にする $K^\xi$ と $w^\xi$ の設定

式 (70) のファジィモデルによって得られた式 (81) のシステム行列  $\Phi$  が安定行列となるように、 $\Phi$  に基づく特性方程式に対して Jury の安定判別法を適用して全てのパラメータ  $K^\xi$  と  $w^\xi$  ( $\xi = 1, 2$ ) を一度に決定した。

$$\Phi = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \quad (81)$$

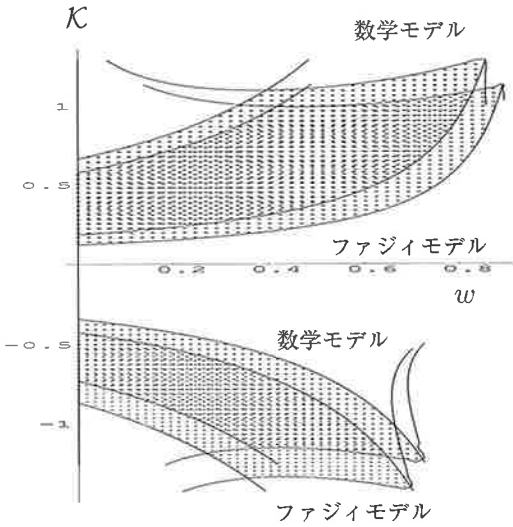


図 14: Jury の方法による領域  $w$ - $K$ : 数学モデルとファジィモデルの比較

ここで、式 (81) の  $\bar{A}_1$  は、式 (74) の拡大線形化システムに重心ベクトル  $c_p^1$  を代入して得られる。同様に、式 (81) の  $\bar{A}_2$  は、式 (70) のファジィモデルから得られた  $c_p^2$  近傍の拡大線形化システムのシステム行列として得られる。得られた  $\bar{A}_1$   $\bar{A}_2$  は、各々式 (82), (83) となって、 $\Phi$  は式 (84) となった。

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

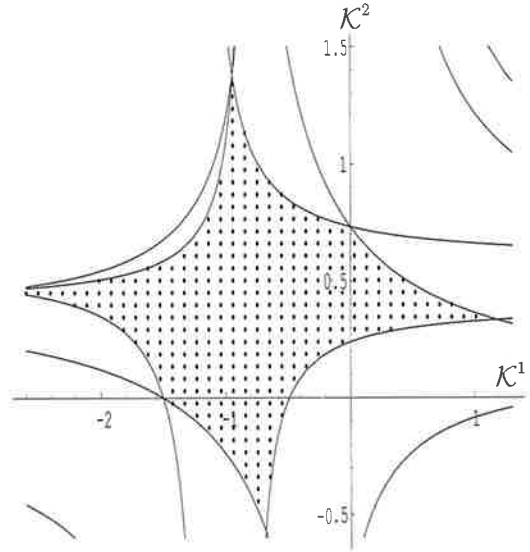


図 15: システム行列  $\Phi$  に対する Jury の方法による領域  $K^1$ - $K^2$  ( $w^1 = w^2 = 0.5$ )

ここで、式 (82) の  $\bar{a}_{11}$ ,  $\bar{a}_{12}$ ,  $\bar{a}_{13}$  は式 (85) を表す。

$$\begin{cases} \bar{a}_{11} = -2.73 - 4.34K^1(1-w^1) - K^1w^1 \\ \bar{a}_{12} = 0.3 + 0.39K^1(1-w^1) \\ \bar{a}_{13} = K^1w^1 \end{cases} \quad (85)$$

また、式 (83) の  $\bar{a}_{21}$ ,  $\bar{a}_{22}$ ,  $\bar{a}_{23}$  は式 (86) を表す。

$$\begin{cases} \bar{a}_{21} = 1.33 - 4.34K^2(1-w^2) - K^2w^2 \\ \bar{a}_{22} = 0.3 - 0.82K^2(1-w^2) \\ \bar{a}_{23} = K^2w^2 \end{cases} \quad (86)$$

そして、式 (84) の  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{12}$ ,  $\dots$ ,  $\phi_{23}$  は式 (87) を表すとする。

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{11} = -3.3 + \mathcal{K}^2(12 - 9.1w^2) \\ \quad + \mathcal{K}^1\{-5.4 + 4w^1 \\ \quad + \mathcal{K}^2(19 - 14w^1 - 14w^2) \\ \quad + 11w^1w^2\} \\ \phi_{12} = \mathcal{K}^1w^1 + \{-2.7 \\ \quad + \mathcal{K}^1(-4.3 + 3.3w^1)\}\{0.3 \\ \quad + \mathcal{K}^2(-0.8 + 0.8w^2)\} \\ \phi_{13} = \mathcal{K}^2\{-2.7 + \mathcal{K}^1(-4.3 + 3.3w^1)\}w^2 \\ \phi_{21} = 1.3 + \mathcal{K}^2(-4.3 + 3.3w^2) \\ \phi_{22} = 0.3 + \mathcal{K}^2(-0.8 + 0.8w^2) \\ \phi_{23} = \mathcal{K}^2w^2 \end{array} \right. \quad (87)$$

式 (88) のように  $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$  をおいて用いると、式 (84) のシステム行列  $\Phi$  の特性多項式は式 (89) となった。

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 = 3 + 5\mathcal{K}^1 - 11\mathcal{K}^2 - 19\mathcal{K}^1\mathcal{K}^2 \\ \quad - 4\mathcal{K}^1w^1 \\ \quad + 14\mathcal{K}^1\mathcal{K}^2w^1 + 8\mathcal{K}^2w^2 \\ \quad + 14\mathcal{K}^1\mathcal{K}^2w^2 - 11\mathcal{K}^1\mathcal{K}^2w^1w^2 \\ \alpha_1 = 0.1 + 0.1\mathcal{K}^1 - 0.2\mathcal{K}^2 - 0.3\mathcal{K}^1\mathcal{K}^2 \\ \quad - 2\mathcal{K}^1w^1 + 5\mathcal{K}^1\mathcal{K}^2w^1 + 3\mathcal{K}^2w^2 \\ \quad + 5\mathcal{K}^1\mathcal{K}^2w^2 - 7\mathcal{K}^1\mathcal{K}^2w^1w^2 \\ \alpha_0 = \mathcal{K}^1\mathcal{K}^2w^1w^2 \end{array} \right. \quad (88)$$

$$F(\lambda) = \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad (89)$$

簡単のため式 (88) において  $w = w^1 = w^2 = 0.5$  とおいて共通の値を用い、 $\gamma_i (i = 0, 1, 2)$  を式 (90) とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_2 = \det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \\ \gamma_1 = \det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_1 \end{bmatrix} \\ \gamma_0 = \det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (90)$$

式 (88), (89), (90) を用いて **Jury** の方法を適用すると、式 (91) の不等式全てを満たす共通領域として、 $w = 0.5$  のときのフィードバックゲインの組 ( $\mathcal{K}^1, \mathcal{K}^2$ ) の有効な範囲が図 15 のように得られた。

$$\left\{ \begin{array}{l} F(1) > 0 \\ (-1)^3 F(-1) > 0 \\ |\alpha_0| < \alpha_3 \\ |\gamma_0| > |\gamma_2| \end{array} \right. \quad (91)$$

### 8.3.3 制御結果と制御入力の振舞い

**P-DFC** の制御入力  $u_k$  で用いる 2 周期あとの状態の予測値  $\hat{x}_{k+2}$  は式 (56) のファジィモデルから決定し、ファジィモデルから解析的に導出した図 13 の  $w$ - $\mathcal{K}$  領域に属する式 (72) の制御入力  $u_k^1$  のパラメータの組 ( $w_1, \mathcal{K}_1$ ) = (0.4, -0.9) と同じく制御入力  $u_k^2$  の ( $w_2, \mathcal{K}_2$ ) = (0.4, 0.6) を用いた。数値実験を行った結果、式 (72) の **UPO** の 2 周期点に状態を安定化することが可能であった。2 周期軌道にカオス制御された状態  $x_k$  の振る舞いを図 16 に、そのときの **P-DFC** の制御入力  $u_k$  の振る舞いを図 17 に示す。尚、**UPR** の大きさとして  $\varepsilon = 0.01$  を用いた。

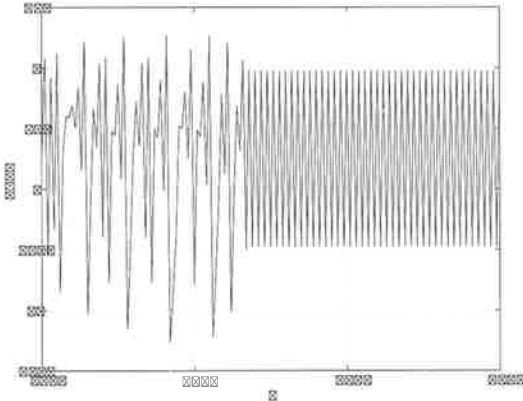


図 16: P-DFC 法によって不安定 2 周期点に制御された状態  $x_k$  の振舞い

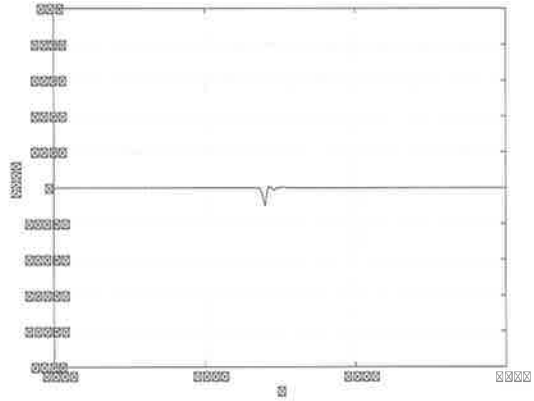


図 17: P-DFC 法を用いた制御系のカオス制御入力  $u_k$  の振舞い

## 9 おわりに

DFC 法と PFC 法とのハイブリッド型のカオス制御法を、未知システムに対するカオス制御に応用した (P-DFC 法)。DFC 入力と PFC 入力とのバランスを決めるパラメータを導入し、未知システムファジィモデルに基づいて、状態の予測値とフィードバックゲインとバランスの重みを解析的に設計する手法を提案した。

未知と仮定したシステムに対する数値実験の結果から、数学モデルの代わりに、時系列から求めたファジィモデルを用いたカオス制御系の設計が可能であり、未知システムのカオス制御に有効であるとわかった。

## 参考文献

[1] 合原一幸, 池口徹, 山田泰司, 小室元政: カオス時系列解析の基礎と応用, 産業図書 (2000)

[2] 合原一幸 (編著): 応用カオス, サイエンス社 (1994)

[3] 潮 俊光: カオス制御, カオス全書, 第4巻, 朝倉書店 (1996)

[4] K. Pyragas: "Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback", *Physics Letters A*, Vol. 170, pp. 421-428 (1992)

[5] A. Kittel, J. Parisi, and K. Pyragas: "Delayed Feedback Control of Chaos by Self-adapted Delayed Time", *Physics Letter A*, Vol. 198, pp. 433-436 (1995)

[6] M.E. Bleich, and J.E.S. Socolar: "Stability of Periodic Orbits Controlled by Time-delayed Feedback," *Physics Letters A*, Vol. 210, pp. 87-94 (1996)

[7] T. Ushio: "Limitation of Delayed Feedback Control in Nonlinear Discrete-time Systems", *Trans. IEEE on Circ. Sys. I*, Vol. 43, pp. 815-816 (1996)

[8] H. Nakajima and Y. Ueda: "Limitation of Generalized Delayed Feedback Control", *Physica D*, Vol 111, pp. 143-150 (1998)

- [9] T. Ushio and S. Yamamoto: "Prediction-based Control of Chaos" , *Physics Letter A*, Vol. 264, pp. 30-35 (1999-12)
- [10] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke: "Controlling Chaos" , *Physical Review Letters*, Vol. 64, No. 11 (1990)
- [11] T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, and J.A. Yorke: "Using Small Perturbations to Control Chaos" , *Nature*, Vol. 363, pp. 411-417 (1993)
- [12] 小西啓治, 川畑洋昭, 武田洋次: 「ニューラルネットワークを用いたカオスの制御」, 電学論 C, Vol. 115-C, No. 11, pp. 1285-1290 (1995)
- [13] 結城健太, 難波雪, 宮崎道雄: 「三次元未知システムのカオス制御」, 電学論 C, Vol. 119-C, No. 6, pp. 684-690 (1999)
- [14] 合原一幸: ニューラルシステムにおけるカオス, 東京電機大学出版局 (1993)
- [15] 中森義輝: ファジィモデリング, オーム社 (1994)
- [16] C.L. Phillips \& H.T. Nagle Jr.: *Digital Control System Analysis and Design*, Prentice-Hall (1984)
- [17] 河野通夫: 「周期係数線形離散時間系の固有値設定」, 計測自動制御学会論文集, Vol. 15, No. 2, pp. 186-192 (1979)