Timoshenko Beam Theoryの適用範囲について

穐　山　和　男*

On the Effective Range of Timoshenko Beam Theory

Kazuo AKIYAMA

Abstract

Timoshenko beam theory is investigated on the velocity of flexural waves. Numerical example is a simple beam.

1. はじめに

本論文は，Timoshenko Beam Theoryを進行波の位相速度曲線に基づいてその適用範囲を検討したものである。

2. 微分方程式

全たわみyと曲げによるたわみ角φとに関する連立偏微分方程式は，Timoshenkoにより次のように与えられている。

$$k\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=\rho S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (1)$$

$$EI\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}+k\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\varphi\right)=\rho I\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (2)$$

ここで$k=k'\,GS$，k'：横断面の形状に依存する係数，G：剛性率，S：断面積，E：ヤング率，I：断面2次モーメント，ρ：材料の密度，z：軸方向座標，t：時間座標

(1)，(2)式からφまたはyを消去すると，yまたはφに関する次の2式が得られる。

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}+\rho S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\left(\frac{\rho SEI}{k}+\rho I\right)\frac{\partial^4 y}{\partial z^2\partial t^2}+\frac{\rho^2 SI}{k}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0 \qquad (3)$$

$$EI\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4}+\rho S\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}-\left(\frac{\rho SEI}{k}+\rho I\right)\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2\partial t^2}+\frac{\rho^2 SI}{k}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4}=0 \qquad (4)$$

3. 位相速度曲線

PochhammerとChreeの厳密解と比較するために断面形状は円形断面とする。

(3)式を波動方程式と考え，進行波を

$$y=C\exp\{i(\gamma z-pt)\} \qquad (5)$$

とおき，(5)式を(3)式に代入すると，断面に沿う1stと2ndの2つのモードの式は，次式のようになる。

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_1=\frac{\sqrt{2}(\pi x)}{[\{1+(a+1)(\pi x)^2\}+\{1+2(a+1)(\pi x)^2+(a-1)^2(\pi x)^4\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} \qquad (6)$$

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_2=\frac{\sqrt{2}(\pi x)}{[\{1+(a+1)(\pi x)^2\}-\{1+2(a+1)(\pi x)^2+(a-1)^2(\pi x)^4\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} \qquad (7)$$

ここでC：定数，γ：波動伝達定数，p：円振動数，π：円周率，$x=(d/2)/\lambda$，d：円断面の直径，λ：波長，$c=p/\gamma$，$\gamma=2\pi/\lambda$，$c_0=\sqrt{E/\rho}$，$a=E/(k'G)$，$i=\sqrt{-1}$，また，(6)，(7)式の左辺の右

平成元年10月31日受理
* 土木工学科助教授