

# 平行弦ワーレントラスの最適形状に関する基礎式

長谷川

明\*

## Fundamental equations for optimized shapes of paralleled warren trusses

Akira HASEGAWA

### Abstract

Many studies on the optimization of trusses have been developed using two-level methods or sub-optimizations. As the object of these studies is the application to practical bridges, shapes obtained there are wanting in generality.

In this report, fundamental equations for optimum shapes of paralleled warren trusses subjected to constant allowable stress are derived analytically, and some considerations on the optimum height-span ratio and a number of panel are described. These equations can be expressed in non-dimensional terms, so optimized values obtained from them are of wide use for the investigation of optimality of trusses.

### 1. はじめに

トラスの最適化については実用的側面から多くの研究がなされ、2段階最適化あるいはサブオブティマイゼーションを利用した方法により、橋梁への応用が研究されている。しかし、これらの研究によって得られる最適形状は、無次元化が困難であるため、一般性に欠ける面がある。

本研究は、これらの研究によって得られる最適形状に対する基礎的資料を示すために、応力制約、しかも一定許容応力の制約を受ける平行弦ワーレントラスの最適形状を解析的に求め、構高支間比およびパネル数について検討したものである。

### 2. 計算モデルと設計条件

#### (1) 計算モデル

計算モデルは図1に示す垂直材を持たない平

行弦ワーレントラスである。部材番号はパネル番号を利用して、図中のようにとるものとする。また、 $N$  はパネル数である。

#### (2) 目的関数と制約条件

目的関数はトラスに使用される材料の体積とし、制約は各部材の応力が許容応力を満足するものとした。また、この許容応力は圧縮許容応力 ( $\sigma_{ca}$ )、引張許容応力 ( $\sigma_{ta}$ ) とともに一定値であり、

$$|\sigma_{ca}| = |\sigma_{ta}| = \sigma_a \quad (1)$$

とした。このため、本論で得られる最適解は全応力設計となる。

#### (3) 荷重条件

荷重は橋梁を想定し、次に示す3ケースとした。いずれの場合も荷重は下弦材に間接載荷す

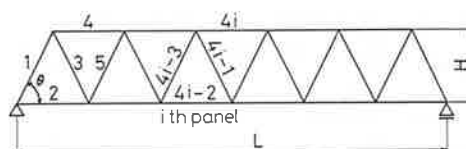


図1 平行弦ワーレントラス

昭和62年10月9日受理

\* 土木工学科助教授

るものとし、自重は考慮されていない。

a) 等分布荷重  $w$  がスパン全長にわたって満載される場合。

b) 移動荷重として集中荷重  $P$  が載荷する場合。

c) 移動荷重として等分布荷重  $w$  が載荷する場合。

### 3. 等分布荷重を受ける場合の最適形状

#### 3.1 最小体積

全スパンに等分布荷重を受ける時の各部材に働く軸力を求め、必要とされる部材体積を計算すると、表1となる。これによれば、上弦材と下弦材のそれぞれに必要な体積は、各部材では異なるものの、総計では等しいことがわかる。これらの体積の和をとり、トラス全体に必要な体積  $V$  を求めると、構高支間比  $a = H/L$  を使って、

$$V = a w L^2 / \sigma_a \quad (2)$$

ここで

$N$  が奇数の時

$$\alpha = \frac{(N^2 - 1)(12a^2 N^2 + 4N + 3)}{24a N^3} \quad (3)$$

$N$  が偶数の時

$$\alpha = \frac{12a^2 N^3 + 4N^2 + 3N - 4}{24a N^2} \quad (4)$$

となる。 $N$  が奇数か偶数かで  $\alpha$  が異なるのは、総和をとる際の部材数の表現が異なるからである。

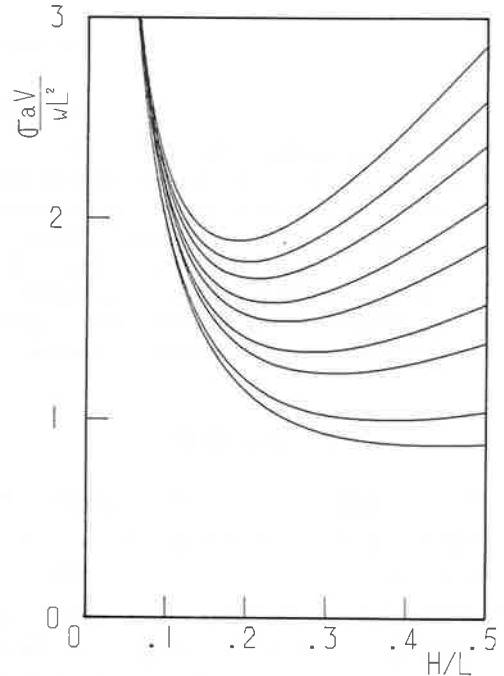


図2 構高支間比による必要体積の変化  
(等分布荷重の場合、下から  $N=2, 3, \dots, 10$ )

表1 等分布荷重を受けるときの軸力と必要体積

	軸 力 $ F_i $	体 積 $V_i$	体 積 の 総 和
斜 材	$\frac{wL}{2N \sin \theta}  2i - N - 1 $	$\frac{wL^3}{2\sigma_a H N} \left( \frac{1}{4N^2} + \frac{H^2}{L^2} \right)  2i - N - 1 $	$N$ が奇数の時 $\frac{wL^3}{2\sigma_a H N} \left( \frac{1}{4N^2} + \frac{H^2}{L^2} \right) (N^2 - 1)$ $N$ が偶数の時 $\frac{wL^3}{2\sigma_a H N} \left( \frac{1}{4N^2} + \frac{H^2}{L^2} \right) N^2$
下弦材	$\frac{wL^2}{4HN^2} \{-2i^2 + 2i(N+1) - (N+1)\}$	$\frac{wL^3}{4\sigma_a H N^3} \{-2i^2 + 2i(N+1) - (N+1)\}$	$\frac{wL^3(N^2 - 1)}{12\sigma_a H N^2}$
上弦材	$\frac{wL^2}{2HN^2} i(N-i)$	$\frac{wL^3}{2\sigma_a H N^3} i(N-i)$	$\frac{wL^3(N^2 - 1)}{12\sigma_a H N^2}$

式(2)から式(4)によると、体積  $V$  は与えられる  $wL^2/\sigma_a$  に比例し、これが一定であれば構高支間比  $a$  およびパネル数  $N$  によってのみ変化する事となる。この  $a$ 、すなわち無次元化体積の  $a$  と  $N$  による変化を描いたのが図2である。この図によると各パネル数に対して、最小体積を与える  $a$  が存在する。これが最適構高支間比  $a_{opt}$  である。この  $a_{opt}$  はパネル数  $N$  が増大すると、逆に小さくなる。

このような最適値が存在する理由について検討するため、図3を描いた。この図3および表1から弦材と斜材に必要とされる体積を検討すると、次のことが理解される。

a) 弦材の体積は構高支間比に反比例しており、構高を高くするほど体積を少なくできる。これは、弦材の部材長は構高に無関係であり、部材力は構高を高くするほど小さくなるからである。

b) これに対し、斜材は、極く小さい構高支

間比では大きい体積を必要とするが、全体積が最小となる付近では構高を高くすると、部材力はわずかに減少するが部材長が長くなるため、必要な体積は増大する。

このため、弦材と斜材の体積の適切な配分が行われる最適構高支間比のトラスが最小体積を与えることとなる。

### 3.2 最適構高支間比

前節で述べた最適構高支間比  $a_{opt}$  は式(3)および式(4)を  $a$  で微分することによって次のように求められる。

$N$  が奇数の時

$$a_{opt} = \sqrt{\frac{4N+3}{12N^2}} \quad (5)$$

$N$  が偶数の時

$$a_{opt} = \sqrt{\frac{4N^2+3N-4}{12N^3}} \quad (6)$$

これらから各パネル数に対する最適構高支間比、その時の下弦材と斜材のなす角  $\theta$  および最小無次元体積  $a$  は図4となる。2パネルトラスの時は  $a_{opt} = \sqrt{3}/4$  となり、トラスの描く3角

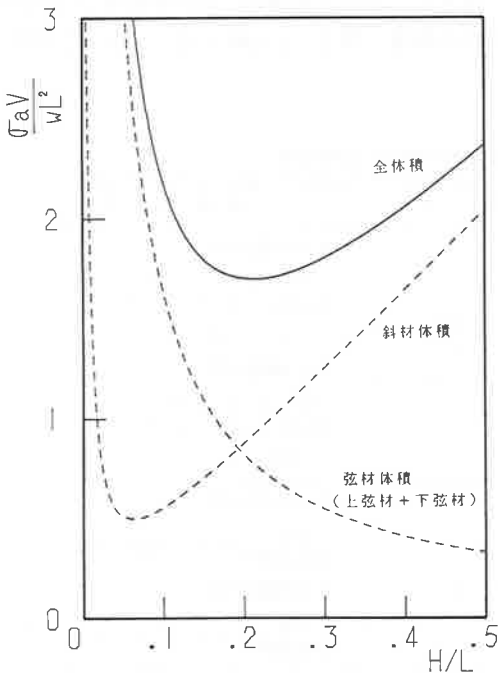


図3 斜材体積と弦材体積（等分布荷重を受ける8パネルトラス）

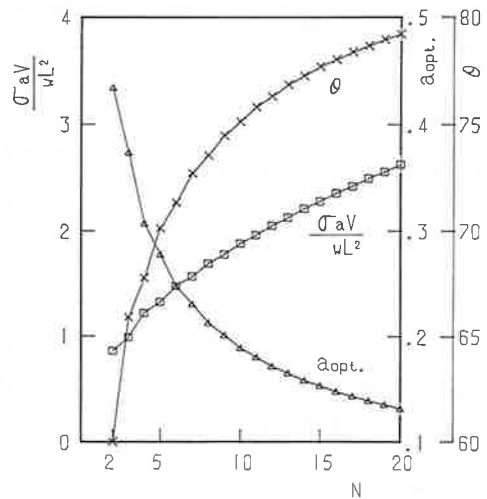


図4 最適構高支間比、部材角  $\theta$  および最小体積（等分布荷重の場合）

形は正3角形となると最小体積を与え、 $N > 2$ では $\theta > 60^\circ$ となっている。

また、パネル数の中でも最小体積を与えるのは、 $N = 2$ であって、パネル数を増大するほど必要体積も増大する。すなわち、できるだけ部材長を長くする方が有利である解が求められている。これは部材長に対する考慮、つまり座屈を考えた許容応力と最大細長比の制約条件が考慮されていないためである。

#### 4. 移動荷重を受けるトラスの最適形状

##### 4.1 単一集中移動荷重の場合

単一集中荷重  $P$  が移動する際、各部材に発生する最大応力が許容応力となる断面を有する部材の体積を求めたのが表2である。この表からトラスの体積  $V$  は

$$V = aPL/\sigma_a \quad (7)$$

ここで

$N$  が奇数の時

$$\alpha =$$

$$\frac{4N^3 + 3N^2 - 4N - 3 + 6a^2N^2(3N^2 - 2N - 1)}{12aN^3} \quad (8)$$

$N$  が偶数の時

$$\alpha = \frac{4N^2 + 3N - 4 + 6a^2N^2(3N - 2)}{12aN^2} \quad (9)$$

となる。

また、最小体積を与える最適構高支間比は  $N$  が奇数の時

$$a_{opt} = \frac{1}{2N} \sqrt{\frac{(8N+6)(N+1)}{3(3N+1)}} \quad (10)$$

$N$  が偶数の時

$$a_{opt} = \frac{1}{2N} \sqrt{\frac{8N^2 + 6N - 8}{3(3N - 2)}} \quad (11)$$

となる。式(8)-(9)で与えられる体積および式(10)-(11)から求められる最適構高支間比をそれぞれ図5, 6に示す。

図5で示される体積は、等分布荷重  $w$  を受ける時の体積(図2)と比較すると、 $N = 2$ の時、

表2 単一集中移動荷重を受けるときの軸力と必要体積

	軸 力 $ F_i $	体 積 $V_i$	体 積 の 総 和
斜 材	$\frac{P}{N \sin \theta} \max \{(i-1), (N-i)\}$	$\frac{PL^2}{\sigma_a HN} \left( \frac{1}{4N^2} + \frac{H^2}{L^2} \right) \cdot \max \{(i-1), (N-i)\}$	$N$ が奇数の時 $\frac{PL^2}{2\sigma_a HN} \left( \frac{1}{4N^2} + \frac{H^2}{L^2} \right) \cdot (3N^2 - 2N - 1)$ $N$ が偶数の時 $\frac{PL^2}{2\sigma_a H} \left( \frac{1}{4N^2} + \frac{H^2}{L^2} \right) \cdot (3N - 2)$
下弦材	$\frac{PL}{2HN^2} \max \{(2N-2i+1)(i-1), (2i-1)(N-i)\}$	$\frac{PL^2}{2\sigma_a HN^3} \cdot \max \{(2N-2i+1), (i-1), (2i-1)(N-i)\}$	$N$ が奇数の時 $\frac{PL^2}{24\sigma_a HN^3} (4N^3 - 3N^2 + 2N - 3)$ $N$ が偶数の時 $\frac{PL^2}{24\sigma_a HN^2} (4N^2 - 3N + 2)$
上弦材	$\frac{PL}{HN^2} i(N-i)$	$\frac{PL^2}{\sigma_a HN^3} i(N-i)$	$\frac{PL^2(N^2-1)}{6\sigma_a HN^3}$

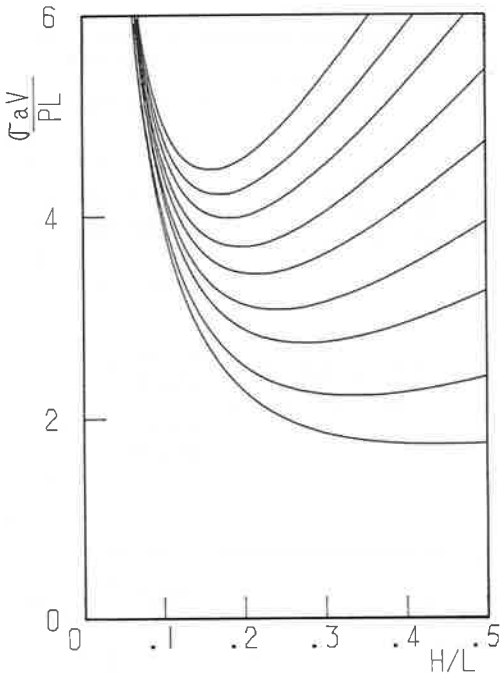


図5 構高支間比による必要体積の変化  
(単一集中移動荷重の場合、下から  $N=2, 3, \dots, 10$ )

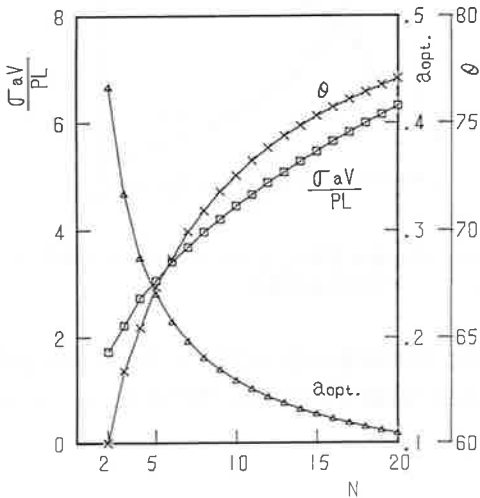


図6 最適構高支間比、部材角  $\theta$  および最小体積(単一集中移動荷重の場合)

$P=wL/2$  とすると同一となり、 $N>2$  では  $P=wL/2$  とした体積よりやや大きい値となっている。

また、図6を図4と比較すると、 $N=2$  ではやはり正3角形をなすトラスが最適であるが、一般には、最適構高支間比は等分布荷重を受けるトラスに比べ低い。

#### 4.2 等分布移動荷重の場合

支間  $L$  を越える長さの等分布荷重  $w$  が移動する際、各部材に発生する最大応力が許容応力となる断面を有する部材の体積を求めたのが表3である。この表を、移動せず全スパンに等分布荷重が満載されるとして求めた表1と比較すると、弦材は同一の値となっている。これは、弦材の影響線が正側（圧縮）あるいは負側（引張）にだけ存在するため、全スパンに載荷されるときが最大部材力を発生するためである。これに対し斜材の影響線は荷重位置によって正と負の領域があるため、一般には部分的に載荷される時の方が最大部材力となり、表1より大きい値となっている。この表からトラスの体積  $V$  は

$$V = \alpha wL^2 / \sigma_a \quad (12)$$

ここで

$N$  が奇数の時

$$\alpha = \frac{8N^3 + 7N^2 - 10N - 3 + 4a^2N^2(7N^2 - 2N - 3)}{48aN^3} \quad (13)$$

$N$  が偶数の時

$$\alpha = \frac{8N^2 + 7N - 10 + 4a^2N^2(7N - 2)}{48aN^2} \quad (14)$$

となる。

また、最小体積を与える最適構高支間比は  $N$  が奇数の時

$$a_{opt} = \frac{1}{2N} \sqrt{\frac{8N^3 + 7N^2 - 10N - 3}{7N^2 - 2N - 3}} \quad (15)$$

$N$  が偶数の時

$$a_{opt} = \frac{1}{2N} \sqrt{\frac{8N^2 + 7N - 10}{7N - 2}} \quad (16)$$

表3 等分布移動荷重を受けるときの軸力と必要体積

	軸 力 $ F_i $	体 積 $V_i$	体積の総和
斜 材	$\frac{wL}{2N(N-1)\sin\theta} \max\{(i-1)^2, (N-i)^2\}$	$\frac{wL^3}{2\sigma_a H N(N-1)} \left( \frac{1}{4N^2} + \frac{H^2}{L^2} \right) \cdot \max\{(i-1)^2, (N-i)^2\}$	$N$ が奇数の時 $\frac{wL^3}{12\sigma_a H N} \left( \frac{1}{4N^2} + \frac{H^2}{L^2} \right) \cdot (7N^2 - 2N - 3)$ $N$ が偶数の時 $\frac{wL^3}{12\sigma_a H} \left( \frac{1}{4N^2} + \frac{H^2}{L^2} \right) \cdot (7N - 2)$
下弦材	$\frac{wL^2}{4HN^2} \{-2i^2 + 2i(N+1) - (N+1)\}$	$\frac{wL^3}{4\sigma_a H N^3} \{-2i^2 + 2i(N+1) - (N+1)\}$	$\frac{wL^3(N^2-1)}{12\sigma_a H N^2}$
上弦材	$\frac{wL^2}{2HN^2} i(N-i)$	$\frac{wL^3}{2\sigma_a H N^3} i(N-i)$	$\frac{wL^3(N^2-1)}{12\sigma_a H N^2}$

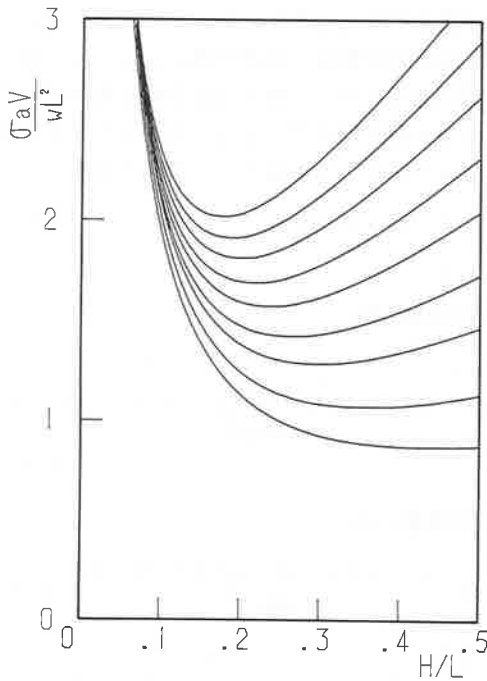


図7 構高支間比による必要体積の変化  
(等分布移動荷重の場合, 下から  $N=2, 3, \dots, 10$ )

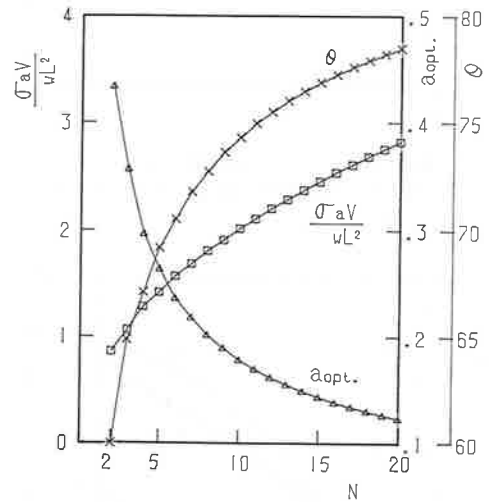


図8 最適構高支間比, 部材角  $\theta$  および最小体積(等分布移動荷重の場合)

値は, 弦材体積が互いに等しい等分布荷重を受ける時の最適トラスに近い値であることがわかる。

## 5. おわりに

トラスの実際の設計では, 本論で使用した制約条件ではなく, 部材毎に部材寸法によって異なる許容応力, 最小板厚および最大細長比の条件があり, 構造全体にはたわみ制約がある。本

となる。式(13)-(14)で与えられる体積および式(15)-(16)から求められる最適構高支間比をそれぞれ図7, 8に示す。

図7, 8をすでに述べた荷重のトラスと比較すると, 等分布移動荷重を受けるトラスの最適

論はこの中で部材断面決定に大きく影響する許容応力だけを制約とし、しかもこれを一定値と考えることによって、トラスの体積を目的関数に選り平行弦ワーレントラスの最適値を解析的に解き、無次元化された基礎式を導入したものである。これらの基礎式から得られた結論は次のとおりである。

(1) 弦材と斜材の体積は構高支間比の増大に対しそれぞれ減少、増大する。この構高支間比の中で両者の体積の和、すなわちトラス全体の体積を最小とする最適構高支間比がある。

(2) 最適構高支間比はパネル数が大きくなる

と逆に小さい値となる。

(3) 本論で使った3種の荷重では、2パネルのトラスの最適形状は同一となり、この時トラスの描く3角形は正3角形となる。

(4) パネル数が2を越えるトラスでは、最適構高支間比は単一集中移動荷重、等分布移動荷重そして等分布固定荷重の順に高い値を示す。この差はパネル数が多いほど大きく、 $N=20$ で20%程度異なっている。

本論で述べた基礎式は、実用的な設計で得られる最適形状を検討する際、有効に使えるものと考えている。