回転慣性とせん断力を考慮した正規関数系とそれらの直交関係

穐　山　和　男*

Normal Functions and Their Orthogonality Considering Rotary Inertia and Shearing Force

Kazuo AKIYAMA

Abstract

When demensions of a section of a bar are not short in comparison with its length, rotary inertia and shearing force influence eigen values.

This paper mentions normal functions and their orthogonality considering rotary inertia and shearing force.

1. 序　言

微小自由横振動において，棒の断面寸法がその長さと比べて小さい場合には，曲げモーメントによる曲げ変形だけを考え，棒の断面寸法に無関係に固有値が定まる。しかし，棒の断面寸法がその長さに比べて小さくない場合には，回転慣性とせん断変形をも考慮に入れて固有値を定めなければならない[1),2)]。

本論は，回転慣性とせん断力の影響を考慮した場合の正規関数系とそれらの直交関係を論じる。

2. 正規関数系

y をせん断変形まで含むたわみ，y_b を曲げモーメントだけによるたわみとすれば，y と y_b とが満足する微分方程式は，回転慣性とせん断力を考慮して次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{k\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial y_b}{\partial z}\right)\right\}=\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(EI\frac{\partial^2 y_b}{\partial z^2}\right)+k\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial y_b}{\partial z}\right)=\rho I_\rho\frac{\partial^3 y_b}{\partial z\partial t^2} \tag{2}$$

ここで，z：軸方向座標，$k=k'GA$，G：横弾性係数，A：断面積，k'：横断面の形に依存する係数，E：ヤング率，I：断面2次モーメント，ρ：材料の密度，$I_\rho=\rho AR^2$，R：中立軸まわりの横断面の2次半径，t：時間座標

(1)，(2)式において，p を円振動数として，

$$\left.\begin{aligned} y(z,\ t)&=Y(z)exp(ipt)\\ y_b(z,\ t)&=Y_b(z)exp(ipt)\\ \Theta&=\frac{dY_b}{dz}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

とおけば，等断面の場合，次の2つの微分方程式を得る。

$$k\left(\frac{d^2Y}{dz^2}-\frac{d\Theta}{dz}\right)+\rho Ap^2Y=0 \tag{4}$$

$$EI\frac{d^2\Theta}{dz^2}+k\left(\frac{dY}{dz}-\Theta\right)+\rho I_\rho p^2\Theta=0 \tag{5}$$

(4)，(5)式から Y または Θ を消去すると，Y と Θ とは共に次の4階の微分方程式を満足する。

昭和58年11月30日受理
* 土木工学科助教授