

かたちのスペクトルに関する 2, 3 の考察

長谷川 明

Some Discussions on Shape Spectrum

Akira HASEGAWA

Abstract

Shape Spectrum is one of the effective methods for representations of the shapes. When we express the shape by the use of the discretized points, we can use two kinds of vector to express the shape. They are the vectors which connect two neighbor points and the vectors which connect the points to the original point. In this paper, we discuss on the two kinds of shape spectrum.

1. はじめに

物質や生体の形（かたち）は様々である。これらの形は、自然的にあるいは人工的に決定されている。建設で利用される材料や構造の形も様々で、自然的に決定されているものもあれば、人工的に設計を通して決定されている形もある。材料の形がどのようなものであるかは、強度などの物理的性質などに大きな影響を与える場合がある。また、構造あるいは構造物のかたちは、その安全性、施工性、あるいは景観と関わりが深い。

このため、形を評価する方法を検討することは重要な課題といえる。本文は、このような形を評価する方法として、かたちのスペクトルを利用する方法を示し、そのスペクトルの持つ基本的な特性を考察したものである。

2. 形の表現

形を図1のように離散化された n 個の節点を結ぶ線分で表現するとき、これらの n 個の節点と基準点を結ぶ動径ベクトル Z_j を直接使っ

て

$$Z_j = x_j + iy_j$$

ここで $i = \sqrt{-1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ と表現する方法と、節点と次の節点を結ぶベクトル

$$W_j = Z_{j+1} - Z_j$$

を使って

$$Z_j = Z_0 + \sum_{k=0}^{j-1} W_k$$

と表現する方法がある。本文ではこの節点と節点の間を結ぶベクトルを節点間ベクトルと呼ぶ。以下、この2種類のベクトルを使って形を

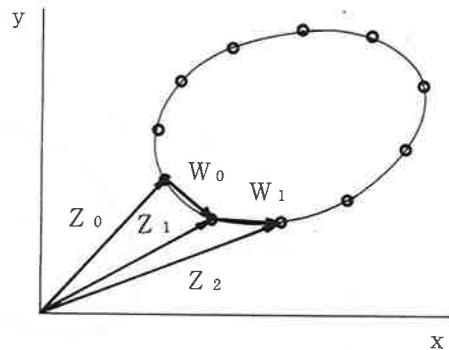


図1 形の表現
動径ベクトル Z_j と節点間ベクトル W_j

平成6年10月18日受理
*土木工学科・助教授

スペクトル解析することについて検討する。

3. 節点間ベクトルによる形のスペクトル

3.1 基本式

今、節点間ベクトル W_j を複素有限フーリエ解析し、求めたフーリエ係数 C_k を使って

$$W_j = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \phi_{jk}$$

と表すことを考える。ここで、

$$\phi_{jk} = \cos \frac{2\pi jk}{n} + i \sin \frac{2\pi jk}{n}$$

とし、 C_k を $k=0 \sim n/2$ と $k=n/2 \sim n-1$ までの2つに区分すると、

$$\begin{aligned} W_j &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k \phi_{jk} \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} C_k \phi_{jk} + \sum_{k=-n/2+1}^{-1} C_{n+k} \phi_{j(n+k)} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \phi_{j(n+k)} &= \cos \frac{2\pi j(n+k)}{n} + i \sin \frac{2\pi j(n+k)}{n} \\ &= \phi_{jk} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} W_j &= \sum_{k=0}^{n/2} C_k \phi_{jk} + \sum_{k=-n/2+1}^{-1} C_{n+k} \phi_{jk} \\ &= \sum_{k=-n/2+1}^{n/2} \bar{C}_k \phi_{jk} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\bar{C}_k = \begin{cases} C_{n+k} : k = -\frac{n}{2} + 1, -\frac{n}{2} + 2, \dots, -1 \\ C_k : k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \end{cases}$$

である。この \bar{C}_k を $|k|$ が N 以下の低次の成分と、 N より大きい高次の成分に区分することで、

$$W_{Nj} = \sum_{|k| \leq N} \bar{C}_k \phi_{jk}, \quad \bar{W}_{Nj} = \sum_{|k| > N} \bar{C}_k \phi_{jk}$$

と表すと、形は、

$$Z_j = Z_0 + \sum_{r=0}^{j-1} (W_{Nr} + \bar{W}_{Nr})$$

と表すことができる。このとき

$$Z_{Nj} = Z_0 + \sum_{r=0}^{j-1} W_{Nr}, \quad \bar{Z}_{Nj} = \sum_{r=0}^{j-1} \bar{W}_{Nr}$$

はそれぞれ、周波数の小さい部分、大きい部

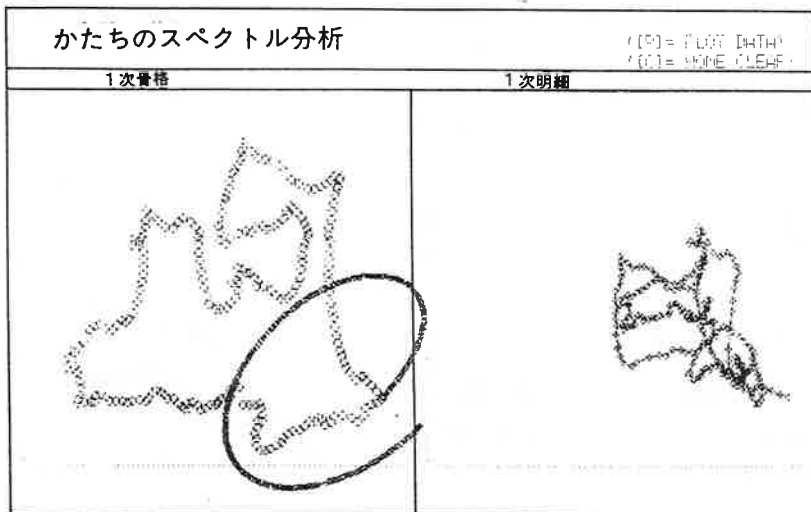


図2 骨格と明細；青森県地図を256分割している

かたちのスペクトルに関する2,3の考察

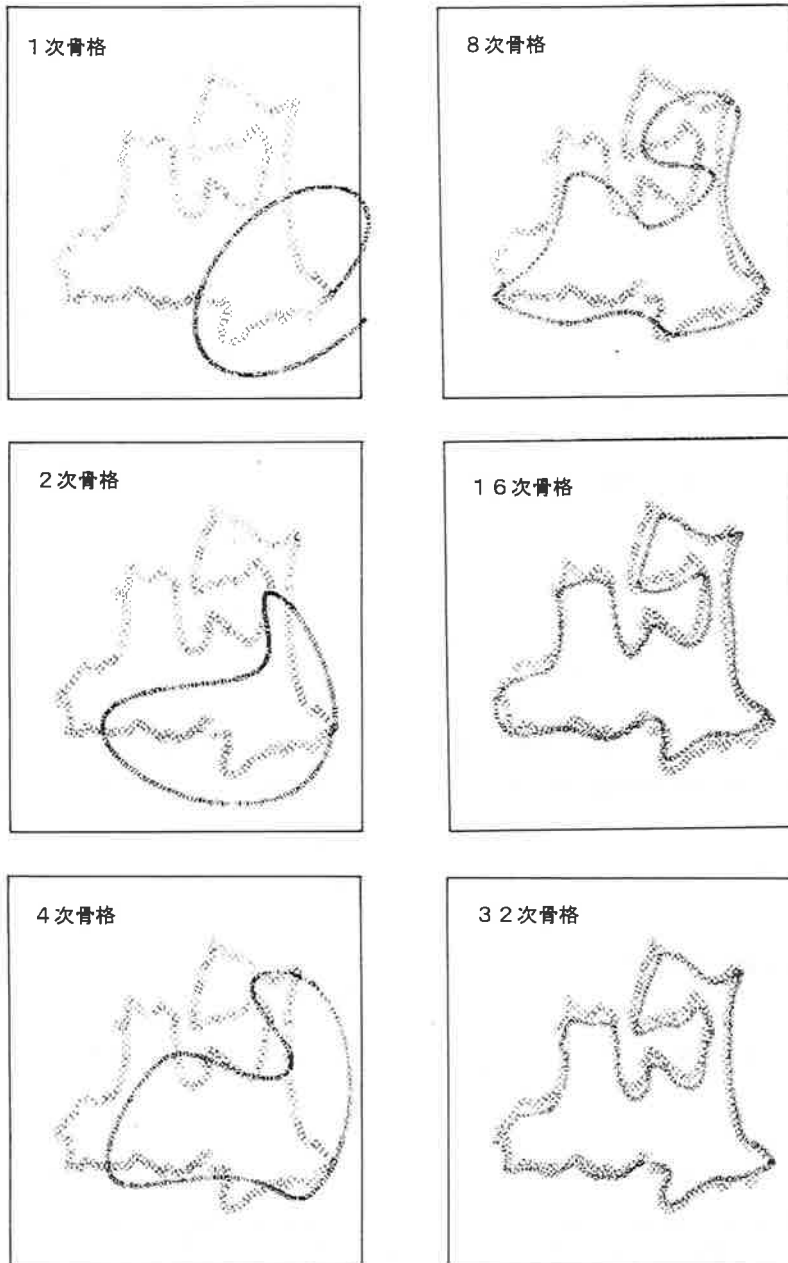


図3 骨格の次数による表現される形の変化

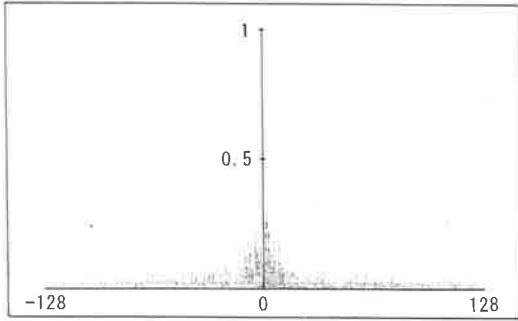


図4. 形のスペクトル図
図2, 図3はこのスペクトルの一部を使って表現されている

分を表しているため、N 次骨格、N 次明細と呼ばれる。

3.2 計算例

図2は青森県の地図を256個の節点で表現したときの1次骨格および1次明細を示している。この図では、それぞれがなにを意味しているのかわからないが、図3のように骨格の次数を大きくすると、徐々に青森県の形に戻っていくのがわかる。図4はこの青森県の地図の形のスペクトル図である。

3.3 単一スペクトルの特性

ここでは、既に示したスペクトルの成分がどのような意味を持つか検討した。

(1) $C_0=1, C_k=0 (k \neq 0)$ の場合

$$\begin{aligned} W_j &= C_0 \phi_{0j} \\ &= C_0 \left(\cos \frac{2\pi 0j}{n} + i \sin \frac{2\pi 0j}{n} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって、 W_j は j のすべてに対し $W_j=1$ となるため、形は図5-Aのような右向きの直線となる。

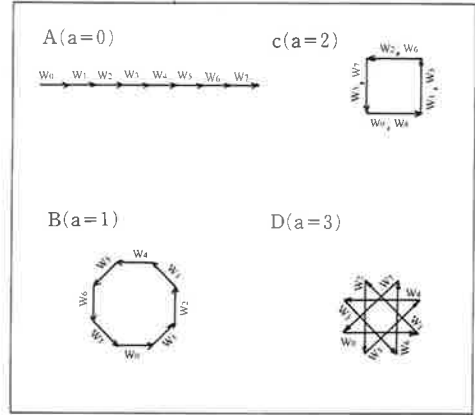


図5 単一スペクトルからできる形
(A: $a=0$ の時) (B: $a=1$ の時)
(C: $a=2$ の時) (D: $a=3$ の時)

(2) $C_1=1, C_k=0 (k \neq 1)$ の場合

$$\begin{aligned} W_1 &= \cos \left(2\pi \times \frac{1}{n} \times 1 \right) + i \sin \left(2\pi \times \frac{1}{n} \times 1 \right) \\ W_2 &= \cos \left(2\pi \times \frac{1}{n} \times 2 \right) + i \sin \left(2\pi \times \frac{1}{n} \times 2 \right) \\ W_3 &= \cos \left(2\pi \times \frac{1}{n} \times 3 \right) + i \sin \left(2\pi \times \frac{1}{n} \times 3 \right) \end{aligned}$$

となり、できあがる形は $n=8$ とすると、図5-Bとなる。

(3) $C_a=1, C_k=0 (k \neq a)$ の場合

$$\begin{aligned} W_1 &= \cos \left(2\pi \times \frac{a}{n} \times 1 \right) + i \sin \left(2\pi \times \frac{a}{n} \times 1 \right) \\ W_2 &= \cos \left(2\pi \times \frac{a}{n} \times 2 \right) + i \sin \left(2\pi \times \frac{a}{n} \times 2 \right) \end{aligned}$$

となり、できあがる形は図5-C ($a=2$)、図5-D ($a=3$)となる。これらは $n=8$ として描いている。

このように単一スペクトルによる形をいくつか描いてみると、角度を $2\pi a/n$ ずつ変化する回転ベクトルを示すことがわかる。スペクトルが低次であればゆっくりした回転を表し、高次であれば速い回転を意味することが示されている。

このため、この節点間ベクトルのスペクトルによる形の表現は、低次成分は外周の穏やかな

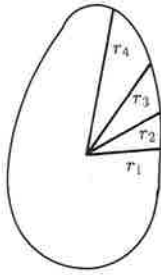


図 6 動径ベクトルによる表現

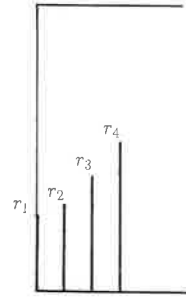


図 7 動径ベクトル

変化を、高次成分は鋭い変化を表現すると考えられる。

なお、フーリエ係数が負の値をとるとき、あるいは虚数であるときは、回転の左回り、右回りの別、または第 1 番目のベクトルの違いを表すもので、基本的にスペクトルの低次成分と高次成分が形に与える影響には変化がないと考えられる。

4. 動径ベクトルによる形のスペクトル

図 6 に示すように、形は任意の点からの動径ベクトルで表現することができる。分割数を n とし、動径を図 7 のように並べると、波形を扱うときと同じく、基準線からの角度 θ における動径を、

$$R = a_0 + \sum_{k=1}^{n/2} a_k \cos(k\theta + \phi_k)$$

と表現できる。ここで、 a_k と ϕ_k は、それぞれ形のスペクトル k 成分の振幅および位相差である。また、 a_0 は形のスペクトル成分の中の円の半径を示す。

大きさの異なる形を考慮するため、スペクトル成分を

$$\sum_{k=0}^{n/2} A_k = 1$$

となるよう正規化し、

$$A_k = a_k / \sum_{k=0}^{n/2} a_k$$

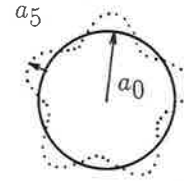


図 8 かたちの例

を動径ベクトルによる形のスペクトルとする。

例えば、図 8 は半径 a_0 の円に、 $2\pi/5$ 周期で振幅 a_5 の \sin 関数の波が重ねられた形である。半径 $a_0=150$ 、振幅 $a_5=28$ とすると、この図形を 64 分割したときの動径ベクトルは図 9 となり、この図の形のスペクトルは図 10 となる。

この結果、形のスペクトルがスペクトル図の右側（高周波成分）にあれば凹凸の激しい形状を示すこととなる。

5. ま と め

本文は、形を評価する方法としてかたちのスペクトルを利用する方法を検討したものである。ここでは、形を表現する方法として節点間ベクトルと動径ベクトルを利用する方法について述べた。それぞれの方法の特徴を述べると次のようになる。

(1) 節点間ベクトルによる形のスペクトル

このスペクトルは、ベクトルの回転の度合いを検討するには望ましいといえる。しかし、形の凸凹を評価する方法としては適用に問題がある。一方で、凸凹が激しく動径ベクトルでは詳

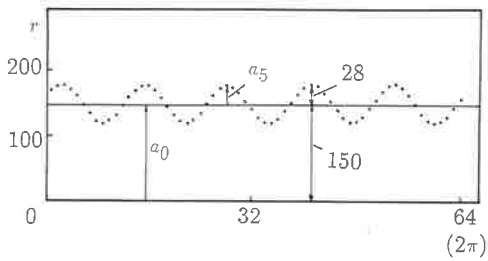


図9 図8の形の動径ベクトル

細に形を表現できない場合には有効な方法といえる。

(2) 動径ベクトルによる形のスペクトル

このスペクトルは、形との関連、特にかたちの凹凸との関連においてはわかりやすいスペクトルである。しかし、上述のように形が複雑な場合に適用が困難な場合が想定される。

いずれの方法においても、スペクトルの特性の評価方法、形を離散化する合理的手法など解決しなければならない問題がある。

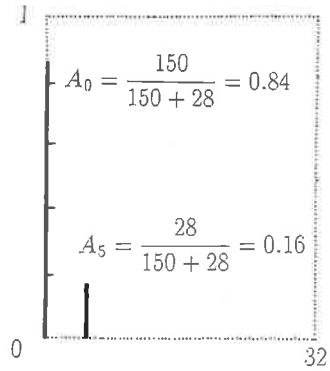


図10 図8のかたちのスペクトル図

参考文献

- 1) 上坂吉則：かたちのスペクトル分析，数理学，Vol. 296, 1983
- 2) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店
- 3) 大崎順彦：地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会