

# 倒立振子のモデリングと制御

松坂知行\*

Modelling and Simulation of an inverted Pendulum

Tomoyuki MATSUZAKA

Abstract

This paper presents the modelling and control of an inverted pendulum. First, dynamical equations of an inverted pendulum and then state space equations are derived. Second, a parameter estimation method of system is proposed. Using these parameters, the controller based on eigen value assignment is described. Finally, simulation and experimental results are compared. Although some disagreement due to mechanical friction was observed, both results almost agreed.

## 1. まえがき

倒立振子とは、自由に左右走行できる台車の上に振り子の下側を止め、台車を制御することにより垂直に倒立させるものである。その原理は、台車の位置と振子の角度をセンサーによって検出し、その信号をコンピュータに入力し、その値に応じた制御電圧をサーボモータに加え、台車の位置を制御することにより、振子を倒立させるものである。本稿ではまず倒立振子のモデリングを行うため状態方程式を導く。これらの状態方程式にはいくつかの未知パラメータが含まれるので、これらの未知パラメータの推定方法について述べる。従来未知パラメータの推定方法には、種々の方法が提案されていたが、本稿ではこれらの方法を実験的に検討し、これをもとに新しい推定式を提案し妥当なパラメータを推定することができた。つぎにこれらのパラメータをもとにして制御則を導き、実際の制御を行った。

---

平成2年12月15日受理

\* 情報システム工学研究所教授

## 2. 倒立振子の制御系の構成

図1は倒立振子とその制御装置を示す。図示のとおり台車、振り、台車の位置を検出するポテンショメータ、振子の角度を検出するポテンショメータ、タイミングベルトを介して台車を左右に移動させるサーボモータ、センサの入力を取り込むA/D変換器、制御量を電圧に変換するためのD/A変換器、サーボモータに制御電圧を加えるためのパワーアンプ、制御則を計算するPC-9801VX21から構成される。A/D、D/A変換器はそれぞれ12bitのものを用いている。また台車の移動を制限するため左右の端にはリミットスイッチを設け、これを超えて台車が移動しようとした場合には、サーボアンプの制御電圧を遮断するようにしている。

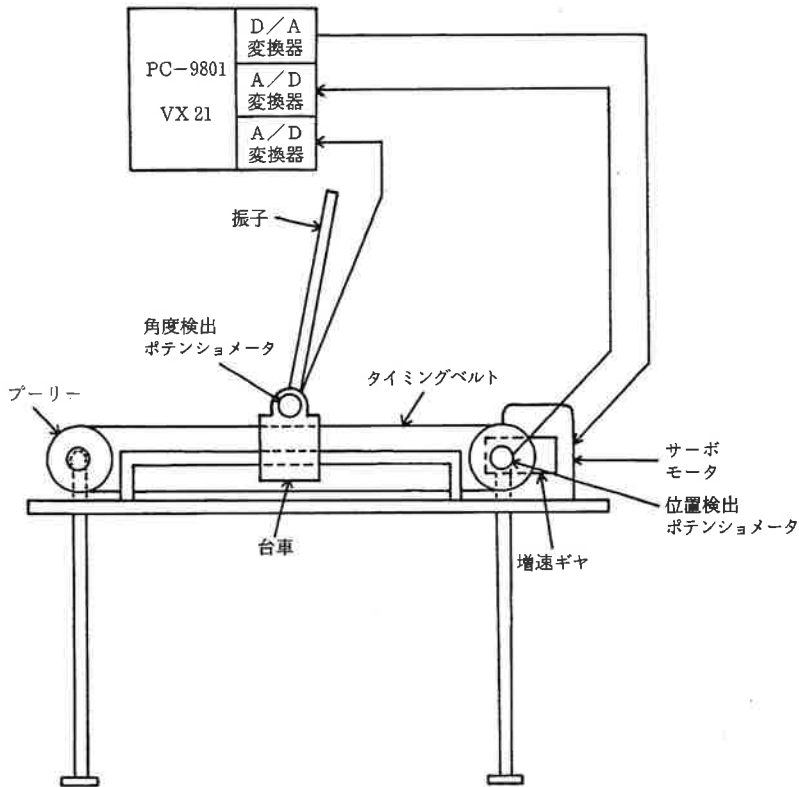


図1 倒立振子  
Fig.1 Inverted pendulum

## 3. 倒立振子の運動方程式

図2に台車と振子に働く力の関係を示す。この図から運動方程式モデルを導くと以下のようなになる (1)、(2)、(3)。

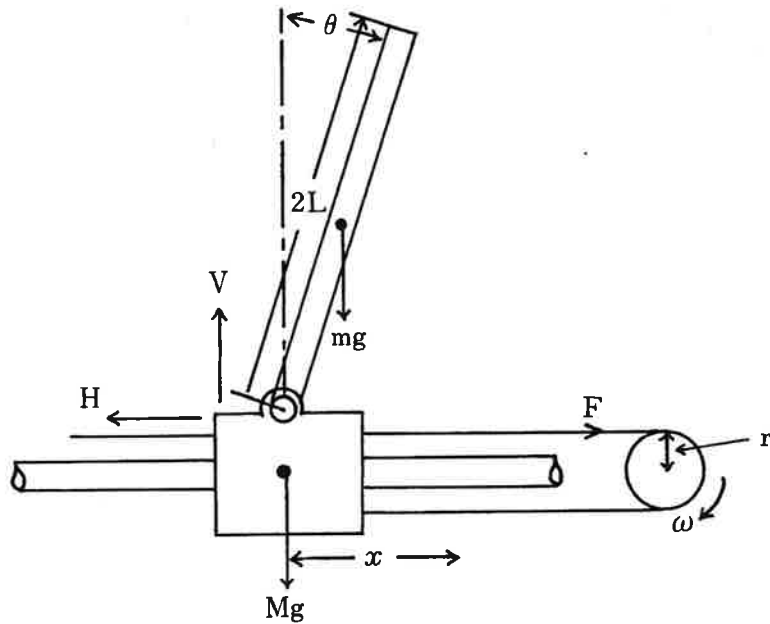


図2 台車と振子に働く力  
Fig.2 Forces acting on a moving car and a pendulum

### 3.1 振子および台車の運動方程式

台車の水平方向に関して

$$M_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu_1 \frac{dx}{dt} = F - H \quad (1)$$

振子の回転方向に関して

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \varepsilon \frac{d\theta}{dt} = VL \sin \theta - HL \cos \theta \quad (2)$$

振子の水平方向に関して

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + L \sin \theta) = H \quad (3)$$

振子の鉛直方向に関して

$$m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \theta) = V - mg \quad (4)$$

ただし

- $x$  : 台車の変位
- $\theta$  : 振子の傾角
- $M_1$  : 台車の質量
- $\mu_1$  : 台車の摩擦抵抗

- F : 台車に作用する力
- m : 振子の質量
- J : 振子の重心まわりの慣性モーメント
- L : 振子の重心と支軸間の距離
- H : 振子の台車の接合部に働く水平抗力
- V : 振子の台車の接合部に働く鉛直抗力
- g : 重力加速度
- $\epsilon$  : 振子の支軸の摩擦係数

### 3.2 駆動系の運動方程式

図3にサーボ系の構成を示す。これより以下の運動方程式が求められる。

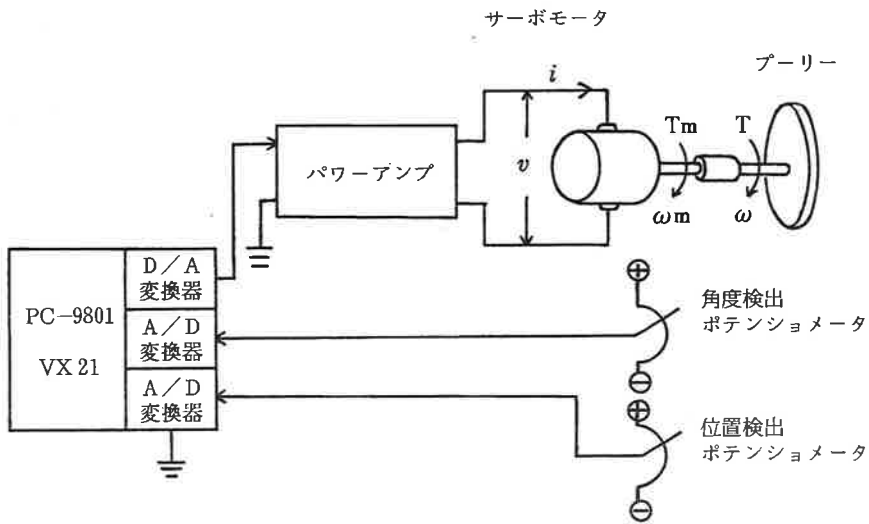


図3 サーボ系  
Fig.3 Servomechanism

#### (a) 直流サーボモータの駆動方程式

サーボモータの駆動方程式は以下のようになる。

$$v = R_a i + K_s \omega_m \tag{5}$$

$$T_m = K_t i \tag{6}$$

ただし

- v : サーボモータの制御電圧
- i : 電機子電流
- $R_a$  : 電機子抵抗
- $K_s$  : 速度定数
- $K_t$  : トルク定数

$T_m$  : モータのトルク  
 $\omega_m$  : モータの角速度

(b) プーリの軸回りの運動方程式

プーリの軸回りの運動方程式は以下のようになる。

$$T = I \frac{d\omega}{dt} + f\omega + rF \quad (7)$$

ここで

$I$  : プーリ、モータを含んだ慣性モーメント  
 $f$  : 摩擦係数  
 $r$  : プーリの半径  
 $F$  : 台車に作用する力  
 $T$  : プーリに作用するトルク

ところでパワーの伝達の法則より

$$\omega_m T_m = \omega T \quad (8)$$

ここで

$$\frac{\omega_m}{\omega} = n$$

とおくことにより(7)式より

$$\begin{aligned} F &= -\frac{I}{r} \frac{d\omega}{dt} - \frac{f}{r} \omega + \frac{T}{r} \\ &= \frac{nK_t}{r R_a} v - \left( \frac{f}{r} + \frac{n^2 K_s K_t}{r R_a} \right) \omega - \frac{I}{r} \frac{d\omega}{dt} \end{aligned} \quad (9)$$

一方

$$\frac{dx}{dt} = r \omega \quad (10)$$

となるから(1)式に(9)、(10)式を代入すると

$$\begin{aligned} \left( M_1 + \frac{I}{r^2} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + \left( \mu_1 + \frac{f}{r^2} + \frac{n^2 K_s K_t}{r^2 R_a} \right) \frac{dx}{dt} = \\ \frac{nK_t}{r R_a} v - H \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

ここで

$$\begin{aligned} M &= M_1 + \frac{I}{r^2} \\ \mu &= \mu_1 + \frac{f}{r^2} + \frac{n^2 K_s K_t}{r^2 R_a} \end{aligned}$$

$$G = \frac{nK_t}{r R_a}$$

とおくと(11)式は

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = G v - H \quad (12)$$

また振子を除くと

$$m = 0$$

より(3)式から

$$H = 0$$

となるから(12)式は

$$\frac{x(s)}{v(s)} = \frac{G}{s(sM + \mu)} \quad (13)$$

となり、これがモータ制御電圧から見た、振子を除いた台車系の伝達関数である。また(1)式と(12)式を比較すると

$$F = G v \quad (14)$$

となることがわかる。

#### 4. 状態方程式

いま平衡点の近傍で線形近似を行うと

$$\sin \theta \doteq \theta, \quad \cos \theta \doteq 1 \quad (15)$$

となり(3)、(4)式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} = H \quad (16)$$

$$V - mg = 0 \quad (17)$$

となる。ここで(15)、(16)、(17)式を(12)、(2)式に代入すると

$$(m+M) \frac{d^2 x}{dt^2} + u \frac{dx}{dt} + mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} = G v \quad (18)$$

$$mL \frac{d^2 x}{dt^2} + (J+mL^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \varepsilon \frac{d\theta}{dt} = mgL \theta \quad (19)$$

となる。ここで

$$x = x_1, \quad \theta = x_2, \quad \frac{dx}{dt} = x_3, \quad \frac{d\theta}{dt} = x_4 \quad (20)$$

とおくと(18)、(19)式は

$$(m+M) \frac{dx_3}{dt} + mL \frac{dx_4}{dt} = G v - \mu x_3 \quad (21)$$

$$mL \frac{dx_3}{dt} + (J+mL^2) \frac{dx_4}{dt} = mgL x_2 - \varepsilon x_4 \quad (22)$$

よって

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m^2 L^2 g}{\Delta} & \frac{-\mu (J + mL^2)}{\Delta} & \frac{mL \varepsilon}{\Delta} \\ 0 & \frac{(m+M)mgL}{\Delta} & \frac{mL \mu}{\Delta} & \frac{-\varepsilon (m+M)}{\Delta} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(J+mL^2)}{\Delta} G \\ \frac{-mL}{\Delta} G \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\Delta = (m+M)J + mL^2$$

とおくことにより

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv \quad (25)$$

を得る。ここに

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \quad (26)$$

## 5. パラメータの推定方法

本節では倒立振子のパラメータの推定方法について述べる。倒立振子の制御の可否は妥当なパラメータを如何に推定するかにかかっていると云っても過言ではない。パラメータの推定方法にはいくつかの方法が考えられる。以下代表的な方法を取り上げ、比較してみる。

### (a) 各要素の推定値を積み上げてシステムのパラメータを推定する方法

この方法は台車の質量、振子の質量などを実測し、振子の慣性モーメントは公式  $mL^2/3$  により求め、摩擦係数などはバネ秤などで求める。このようにして求めた個々の推定値を積み上げてシステムのパラメータを推定するものであるが、このようにして求めた値は、現実の値とかなり異なっていることが多い。この原因は、台車の質量にはベルトの質量を、また振子の慣性モーメントには、支持部の慣性モーメントなどを加える必要があることなどのためである。したがってこの方法では制御に必要な精度でパラメータを推定することは困難である。

(b) 数理モデルのパラメータの当てはめから推定する方法

まづ振子の慣性モーメントは以下のようにして求める。支持部を含めて通常の振子として周期を測定し以下の公式で慣性モーメントを求める。

$$T_p = \sqrt{\frac{J+mL^2}{mgL}} \quad (27)$$

ここで  $T_p$  は周期であり、これを実測することにより慣性モーメント  $J$  がわかる。また振子の振幅の減衰率から  $e$  を決定できる。

つぎに台車系のパラメータを推定する方法を述べる。その一つは振子をはずし、一定の電圧をサーボモータに加えてレール上を走行させる。するとこの時の速度は

$$v_2 = K_c(1 - e^{-t/\tau}) \quad (28)$$

で示される。ここで  $K_c$  は定数、 $\tau$  は時定数である。つぎに既知の質量  $M^*$  を加えて同様の実験を行い、この時  $\tau^*$  なる時定数が得られたとすれば

$$(M+M^*)/M = \tau^*/\tau \quad (29)$$

となり、これより  $M$  を求めることができる<sup>(2)</sup>。

しかしこの方法を実際にやってみるとサーボモータの駆動力が大きいため、時定数の差を求めることは困難であり、実際的ではない。台車系のパラメータを求めるもう一つの方法は(13)式の伝達関数を用いる方法である。いま(13)式を以下のように変形する<sup>(4)、(5)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{x(s)}{v(s)} &= \frac{G}{s(sM + \mu)} \\ &= \frac{K_m}{s(1 + sT)} \end{aligned} \quad (30)$$

ここに

$$K_m = G\mu, \quad T = M/\mu \quad (31)$$

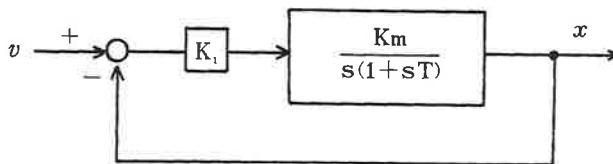


図4 台車のブロック図

Fig.4 Blockdiagram of a moving car

いま図4のように台車のサーボ系を構成し、既知の利得  $K_1$  を前段に加える。また位置をフィードバックする。このように制御系を構成すると入出力間の伝達関数は



$$\begin{aligned}\frac{x(s)}{v(s)} &= \frac{K_1 k_m}{K_1 K_m + s + s^2 T} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2}\end{aligned}\quad (32)$$

ここで

$$\omega_n = \sqrt{K_1 K_m / T}, \quad \zeta = \frac{1}{2T} \sqrt{T / K_1 K_m} \quad (33)$$

また

$$\omega_0 = 2\pi / T_0 \quad (34)$$

とおくと

$$\omega_n = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (35)$$

が得られ(33)式より

$$T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} \quad (36)$$

$$K_m = \frac{\omega_n^2 T}{K_1} \quad (37)$$

となる。

以上の式より以下の手順でパラメータの推定が可能である。

- ① 系にステップ入力を加え、 $K_1$ を調節して振動系にする。この振動状態からを求める。
- ② 振動周期から  $T_0$  を求める。(34)式よりを求める。
- ③ (35)式よりを求める。
- ④ (36)、(37)式より  $T$ 、 $K_m$  を求める。
- ⑤ (31)式より  $\mu$ 、 $M$  を求める。

以上ですべてのパラメータを推定できる。表1は実測から得られたパラメータおよび上記の方法で推定したパラメータである。また行列  $A$ 、 $B$  の値は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.34 & -81.56 & 0.15 \\ 0 & 16.72 & 122.35 & -1.88 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10.6 \\ 10.6 \end{bmatrix}$$

となる。

## 6. コントローラの設計

コントローラは図5のような状態フィードバックを用いて構成する。この時制御力は

$$v = kx$$

$$k = (k_1, k_2, k_3, k_4) \quad (38)$$

で示されるので状態フィードバック制御系は

$$\frac{dx}{dt} = (A+BK)x \quad (39)$$

となる。(38)式をもとにして極配置法により状態フィードバック利得Kを決定できる。すなわち  $(A+BK)$  の個有値の実数部がすべて負ならば安定な制御系を構成できる。具体的な個有値の計算は

$$|sI - (A+BK)| = 0 \quad (40)$$

の根を求めることによって可能である。この方程式の根を指定する（極配置）

表1 倒立振子のパラメータ

Table 1 Parameters of inverted pendulum

| 名 称                | パラメータ                                      |
|--------------------|--|
| 振子の質量              | 0.07 [kg]                                  |
| 振子の長さ              | 0.2 [m]                                    |
| 振子の慣性モーメント         | $0.831 \times 10^{-3}$ [kgm <sup>2</sup> ] |
| 振子の摩擦抵抗 $\epsilon$ | 0.049 [kgm <sup>2</sup> /s]                |
| 位置利得 $K_1$         | 50   |
| 電圧利得 $G$           | 20.09 [kg/V]                               |
| 減衰係数 $\zeta$       | 0.21                                       |
| 台車の等価摩擦係数 $\mu$    | 55.48 [kg/s]                               |
| 台車の等価質量 $M$        | 17.37 [kg]                                 |

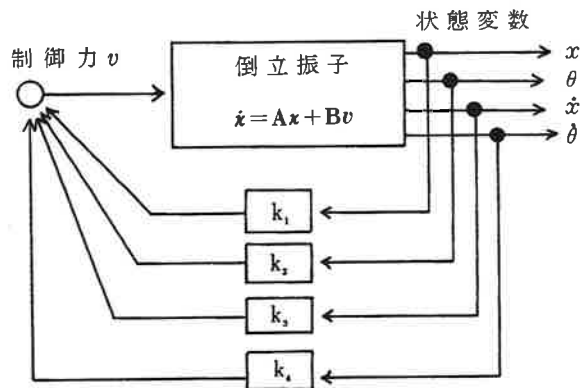


図5 コントローラ

Fig.5 Controller

と状態フィードバック利得Kが得られる。個有値の実数部の絶対値を大きくと応答性は良くなるが、大きな制御力を必要とし、サーボ増幅器の飽和を招くので注意しなければならない。また個有値の実数部の絶対値を小さくすると、制御力は小さくてすむが応答性は悪くなる。そこで極配置をする場合には5節で決定したパラメータをもとにシミュレーションを繰り返し行い、妥当な状態フィードバック利得Kを決定する。

以上の議論はすべて連続系で行ってきたが、実際の制御は離散系である。したがって厳密には、離散系の制御理論を適用しなければならないが、サンプリング周期を十分短くすれば連続系の制御理論が適用可能である。また状態  $x_1$ ,  $x_2$  はセンサにより直接観測可能であるが、状態  $x_3$ ,  $x_4$  は観測できない。そこで通常はオブザーバにより未知状態を推定する。しかしサンプリング周期が短ければ

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{dx}{dt} \\ &\doteq \frac{x(k) - x(k-1)}{\Delta t} \\ x_4 &= \frac{d\theta}{dt} \\ &\doteq \frac{\theta(k) - \theta(k-1)}{\Delta t} \end{aligned}$$

で近似可能である。

表2は以上述べた方法で求めた個有値および利得である。

## 7. 実験結果

実験に用いたパソコンは数値演算プロセッサを搭載したPC-9801VX21である。数値演算プロセッサを搭載すると、数値演算プロセッサ無しの場合に比較して約10倍の演算速度が速くなり、サンプリング周期の短縮に役立つ。またA/D, D/A変換器はいずれも12bitのものを用いている。また制御プログラムはC言語で記述した。表3は、表2で指定した個有値に対する実験結果である。個有値の実数部の絶対値が大きくなるにつれて応答性は良くなるが、無駄な動きが多くなり駆動部に負担がかかり機械的なガタがでてくるので適当な値に設定する必要がある。また平衡点付近で動作している場合、制御偏差が小さくなるため、機械的摩擦が大きいと見かけ上不感帯が生じ、利得を線形にしておくところに打ち勝つ制御電圧が得られないため、振子はフラフラした倒立挙動をする。これを補償するために平衡点付近では利得を高くするようにソフトウェアで工夫をした。

表2 極配置法で指定した個有値と利得  
Table 2 Gains obtained from eigen value assignment

| ケース | 指定個有値  | 利 得                                    |
|-----|--|--|
| 1   | $\lambda_1, \lambda_2 = -2 \pm 2j$<br>$\lambda_3, \lambda_4 = -4 \pm j$  | k1= 3.20 k2=22.63<br>k3= 5.88 k4= 3.57 |
| 2   | $\lambda_1, \lambda_2 = -4 \pm 5j$<br>$\lambda_3, \lambda_4 = -3 \pm 2j$ | k1=12.55 k2=35.67<br>k3=11.05 k4= 5.41 |
| 3   | $\lambda_1, \lambda_2 = -5 \pm 5j$<br>$\lambda_3, \lambda_4 = -7 \pm 2j$ | k1=62.41 k2=81.98<br>k3=31.59 k4=13.29 |

表3 実験結果  
Table 3 Experimental results

| ケース | 実験結果                                |
|-----|-------------------------------------|
| 1   | 制御力が小さく応答性が悪いが外乱に対しても安定             |
| 2   | 応答性がよく無駄な動きが少ない。多少の外乱に対しても安定        |
| 3   | 応答性は非常によく、外乱による立ち直りは早いですが、無駄な動きが多い。 |

図6は位置、振子角度の実測値と不感帯を考慮したシミュレーションとの比較である。制御開始の時点では近い値になっているが、平衡点付近に達すると機械的摩擦、摩擦のヒステリシスのためずれが大きくなっていることが分かる。この時の個有値、利得はケース2の場合である。またサンプリング時間は3.66msである。サンプリング時間を大きくしてゆくと次第に不安定になり40msで制御不能となった。

なお未知状態変数  $x_3, x_4$  の推定にオブザーバを組み込んで制御してみたが、差分式で計算した結果と大きな違いはなかった。

## 8. 結 論

以上倒立振子のモデリング、パラメータ推定法、実際の制御結果、シミュレーションとの比較を述べた。得られた結論は  
(a) 制御系の設計を行う場合、パラメータの推定が最も重要である。この方法としては積み上げ方式よりも、数理モデルに基づいたパラメータ推定

法が妥当である。とくに振子の慣性モーメントの推定が重要で、本実験では公式で計算した値と比較して一桁違った結果が得られている。

また台車のパラメータの推定式を提案した。

- (b) サンプリング周期が制御系の応答に比べて十分短ければ、連続系の理論で取り扱える。本実験では3~30msで安定な制御が行われた。
- (c) 機械系の摩擦のため平衡点付近では、不感帯が生じるのでこれを打ち消す工夫が必要である。

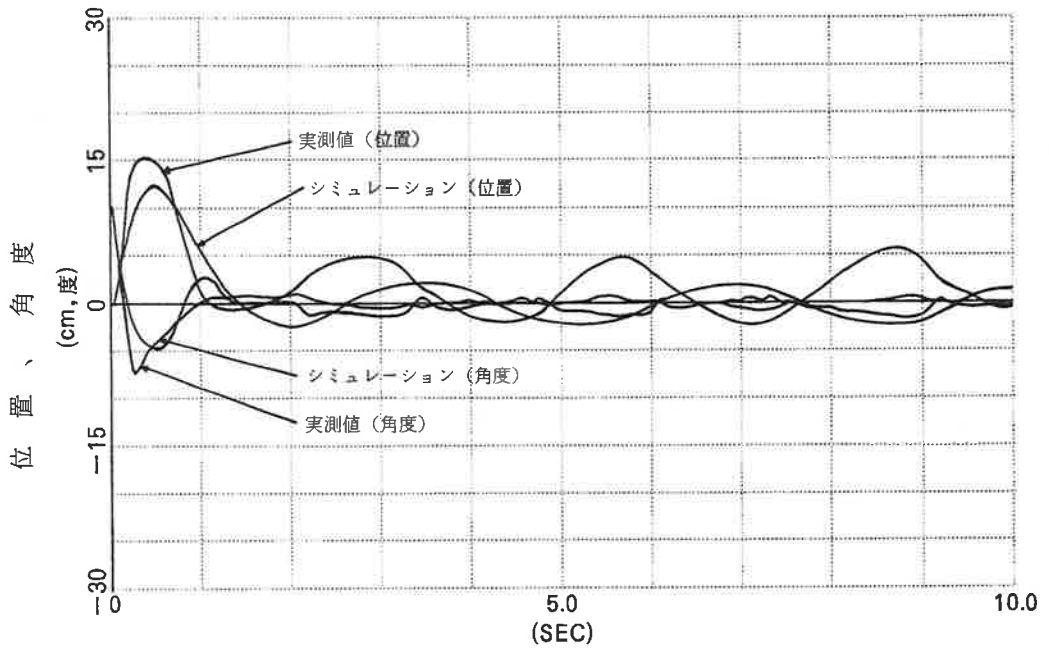


図6 実験結果  
Fig.6 Experimental results

#### 参 考 文 献

- (1) 古田他：メカニカルシステム制御 p16、オーム社、昭和59年
- (2) 森下他：デジタル制御工学 p187、オーム社、昭和62年
- (3) 佐藤：マイコンによる倒立振子の姿勢制御、計測自動制御学会東北支部第96回研究集会資料、No96、1985年
- (4) 中村：倒立振子の最適制御、八戸工大電気工学科卒業論文、1990年
- (5) 大山他：現代制御理論に基づいたデジタル制御系の設計法、インターフェース、1986年12月、p215