

# 極座標を用いた有限要素法による磁界解析

木村 昭穂\*, 松坂 知行\*\*

## Finite Element Analysis of Magnetic Field by Using Polar-Coordinates

Akio KIMURA and Tomoyuki MATUZAKA

### Introduction

This paper deals with the formulation and the magnetic field analysis of the finite element method using polar-coordinates for magnetic problems. It is important for the analysis of the magnetic field to utilize the coordinate conformed to the object with respect to improvement of the analyzing accuracy. For example, the magnetic field the condenser-start motor was analyzed using polar-coordinates. Some numerical results obtained the proposed method are compared with a rectangular-coordinates.

### 1. ま え が き

最近, 計算機の高性能化に伴い数値シミュレーションが盛んに行われている。なかでも有限要素法は, 解析対象物にあったように分割できることや, 複数の材料が簡単に取り扱えるので幅広く利用されている。その普及と同時に精度よく解析することが取り上げられている。このような問題の解決の一方法として, 解析対象物にあった座標系を用いての解析についての検討も必要である。電気機器のように円筒形のもの二次元解析には, 直角座標が用いられているが, 解析対象物にあった座標系を用いての解析という点からすると, 極座標系を用いて解析することが必要である。そこで本研究では極座標による有限要素法の定式化を試み, その検討を行ったので報告する。また解析例として, コンデンサ始動单相誘電電動機の解析を行った。

### 2. 定 式 化

磁気ベクトルポテンシャル  $A$  を用い, 永久磁石, 渦電流項を考慮した, 極座標による磁界の支配方程式<sup>1)~5)</sup> は, 次式で与えられる。

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \nu_{\theta} r \left( \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \nu_r \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right) \right\} \right] = -J_0 + \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} + \nu_0 \left( \frac{\partial M_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} M_{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial r} \right) \quad (1)$$

ここで,  $\sigma$  は導電率,  $\nu$  は磁気抵抗率, 永久磁石の場合には  $\nu_0$ ,  $M_r$ ,  $M_{\theta}$  は  $r$ ,  $\theta$  方向成分の磁化である。ガラーキン法を用いて (1) 式の定式化を行うと, 次式のようにになる。

$$G_i = - \iint_S \nu \operatorname{grad} N_i \times (\operatorname{rot} A - M) r dr d\theta - \iint_S N_i J_0 r dr d\theta + \sigma \iint_S N_i \frac{\partial A_z}{\partial t} r dr d\theta \quad (2)$$

(2) 式を離散化すると次式のようにになる。

平成 6 年 12 月 15 日受理

\* 八戸工業大学 情報システム工学研究所 講師

\*\* 八戸工業大学 情報システム工学研究所 教授

$$\begin{aligned}
 G_i = & \iint \nu \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right) r dr d\theta \\
 & + \sigma \iint_S N_i \frac{\partial A_z}{\partial t} r dr d\theta - \nu_0 \iint_S \left( M_r \frac{1}{r} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \right. \\
 & \left. - M_\theta \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) r dr d\theta - \iint_S N_i J_\theta r dr d\theta = 0
 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $N_i$  は節点  $i$  の補間関数、 $S$  は有限要素法適用領域を示し、 $i=1 \cdots n$  ( $n$  は未知節点数) である。

時刻  $t$  における値には添え字  $t$  を付けることにし、一つの要素  $e$  に着目すれば  $G_i^{(e)t}$  は次式のようになる。ただし、時間微分項を後退差分近似する。

$$\begin{aligned}
 G_i^{(e)t} = & \sum_{k=1}^3 \nu^{(e)t} r_0^{(e)} S_{ike} A_{ke}^t \\
 & - \frac{\Delta^{(e)} J_0^{(e)}}{4} \left( r_0^{(e)} + \frac{r_i}{3} \right) - J_{mi}^{(e)t} \\
 & + \frac{\sigma^{(e)} \Delta^{(e)} r_0^{(e)}}{12} \sum_{k=1}^3 \frac{A_{ke}^t - A_{ke}^{t-dt}}{\Delta t} (1 + \delta_{ik}^{(e)})
 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $A_{ke}$  は節点  $ke$  のベクトルポテンシャル、 $\Delta^{(e)}$  は要素  $e$  の面積、半径  $r_0^{(e)}$  は要素の重中心の値、 $\delta_{ik}^{(e)}$  はクロネッカーのデルタである。また、 $S_{ike}$ 、 $J_{mi}^{(e)t}$  は次式で表される。

$$S_{ike} = \frac{1}{4\Delta^{(e)}} \left( c_i^{(e)} c_{ke} + \frac{1}{r_0^2} b_i^{(e)} b_{ke} \right) \quad (5)$$

$$J_{mi}^{(e)t} = \frac{\nu_0 r_0^{(e)}}{2} \left( \frac{M_r}{r_0^{(e)}} c_i^{(e)} - M_\theta b_i^{(e)} \right) \quad (6)$$

但し、 $b_{ie}$ 、 $c_{ie}$  は循環する添字  $i, j, k, e$  を用いて次式で表される。

$$b_{ie} = \theta_{je} - \theta_{ke}, \quad c_{ie} = r_{ke} - r_{je} \quad (7)$$

ニュートン・ラプソン法によって非線形解析を行うための定式化について述べる。 $G_i$  をテラー展開すれば次式のようなポテンシャルの修正量  $\{\partial A_i\}$  を求める式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial A_n} \\ \vdots & \frac{\partial G_i}{\partial A_j} & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial A_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial A_1 \\ \vdots \\ \partial A_j \\ \vdots \\ \partial A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_1 \\ \vdots \\ -G_i \\ \vdots \\ -G_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

但し、右肩の添字  $t$  は簡単のため省略した。ここで添字  $n$  は未知節点数である。左辺の  $\partial G_i / \partial A_j$  は (4) 式で  $A_j$  で偏微分することにより次式のように計算される。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_i^{(e)t}}{\partial A_j^t} = & \sum_{e=1}^{ne} \left[ \frac{2r_0^{(e)}}{\Delta^{(e)}} \frac{\partial \nu^{(e)t}}{\partial (B^{(e)t})^2} U_{ie}^t U_{je}^t \right. \\
 & + \nu^{(e)t} r_0^{(e)} S_{ij}^{(e)} + \frac{\sigma^{(e)} \Delta^{(e)}}{12} (1 + \delta_{ij}^{(e)}) \\
 & \left. - \frac{\partial J_{mi}^{(e)t}}{\partial A_j^t} \right]
 \end{aligned} \quad (9)$$

但し、 $ne$  は領域中の要素の総数を示す。また、 $U_{ie}^t$ 、 $\partial J_{mi}^{(e)t} / \partial A_j^t$  は次式で与えられる。

$$U_{ie}^t = \sum_{j=1}^3 \nu^{(e)t} r_0^{(e)} S_{ije} A_{ie}^e \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_{mi}^{(e)t}}{\partial A_j^t} = & \frac{\nu_0 r_0^{(e)}}{4\Delta^{(e)}} \left\{ \frac{1}{(r_0^{(e)})^2} \frac{\partial M_r}{\partial B_r^t} c_i^{(e)} c_{ke} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial M_\theta}{\partial B_\theta^t} b_i^{(e)} b_{ke} \right\}
 \end{aligned} \quad (11)$$

$r$ 、 $\theta$  方向成分の磁束密度  $B_r$ 、 $B_\theta$  は、次式で与えられる。

$$B_r = \frac{1}{r_0^{(e)}} \sum_{i=1}^3 \frac{c_{ie}}{2\Delta^{(e)}} A_{ie} \quad (12)$$

$$B_\theta = - \sum_{i=1}^3 \frac{b_{ie}}{2\Delta^{(e)}} A_{ie} \quad (13)$$

### 3. 解析結果

図1はコンデンサ始動单相誘導電動機<sup>6)</sup>の要素の分割を示したものである。また、表1は主な仕様を示したものである。

図2の(a)、(b)は、無負荷時のときのコンデンサ始動单相誘導電動機の等ポテンシャル線を示したものであり、主巻線の電流値は3.4 [A] である。図2の(a)は極座標による等ポテンシャル線であり、(b)は直角座標による

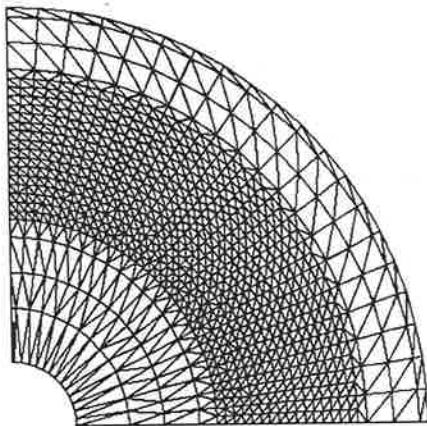


図1 要素の分割図  
Fig.1 Element subdivision

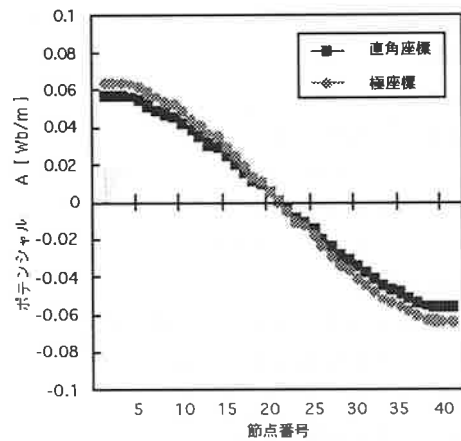


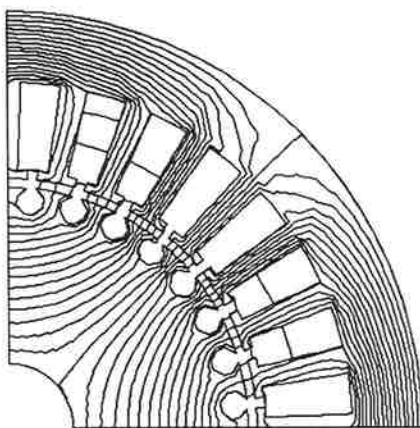
図3 ポテンシャルの比較  
Fig.3 Comparison between polar-coordinates  
and rectangular-coordinates

表1 供試機的主要仕様  
Table 1 Specification of model

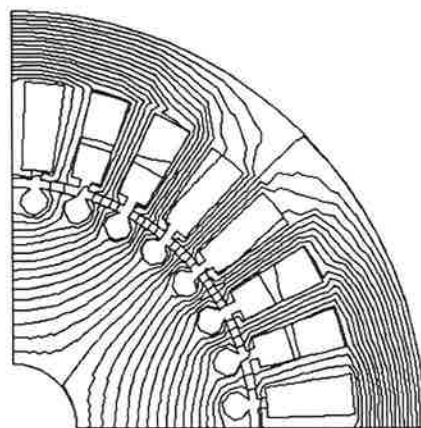
	仕 様
出 力 (W)	100
回転数 (rpm)	1440
電 圧 (V)	100
電 流 (A)	3.8
極 数	4

表2 収束回数  
Table 2 Number of times of convergence

	収束回数	収束値
極 座 標	2	$3.43 \times 10^{-3}$
直角座標	6	$3.51 \times 10^{-3}$



(a) 極座標



(b) 直角座標

図2 等ポテンシャル線図  
Fig.2 Distribution of Magnetic flux

等ポテンシャル線である。図より両者の磁束分布には、大きな違いが見られず、ほぼ一致していることがいえる。

図3は、座標の違いによる回転子表面のポテンシャル値の比較を示したものである。図より極座標の方がポテンシャルが僅かながら大きいことがいえる。これは座標による違いによるものと思われる。以上のことから、ポテンシャルの値に多少の違いはあるが、極座標による解析結果は、直角座標同様に有効であることがいえる。

表2は非線形解析の場合のときの計算の収束回数を示したものである。これより、極座標を適用すると収束回数が少なく計算時間が短縮できることがいえる。また、極座標による解析は、解析対象物に適した座標であることがいえる。

#### 4. ま と め

以上、極座標による有限要素解析は、直角座標による方法と同様の結果が得られること等を

明らかにした。極座標を用いて円筒形のものを非線形解析を行った場合、直角座標のものより収束回数が少なく、計算時間が短縮できることがいえる。また、このことより解析をする場合には、解析対象物に適した座標を利用することが必要である。

今後の課題として、面積座標の取り扱いが不十分であるので、数値積分を取り入れることが必要である。また、実験値との比較検討が必要である。

#### 参 考 文 献

- 1) 中田, 高橋: 電気工学の有限要素法, 1982, 森北出版
- 2) 加川, 村山: BASIC による電気・電子有限要素法, 昭和61年, 科学技術出版
- 3) H・P・スウ: ベクトル解析, 1988, 森北出版
- 4) 砂川: 理論電磁気学, 1988, 紀伊国屋書店
- 5) 竹山: 電磁気学現象理論
- 6) 中田, 高橋: 外部電源を考慮した有限要素法による単相誘導電動機の解析, 電気学会回転機研究会, RM-81-40, 昭和56年