

# 確率過程に付随するファジー過程

大 黒 茂

## The Fuzzy Process Associated with a Stochastic Process

Shigeru OHKURO

abstract

We generalize the usual concept of membership function in the theory of fuzzy set to stochastic processes. It is shown that we can introduce the time-dependent membership function using the fundamental solution of Brownian motion. Thus for stationary stochastic processes, we can introduce the new concept of the fuzzy processes associated with them. Thus the theory of stochastic processes is essentially connected with that of fuzzy processes.

**Key words:** fuzzy process, stochastic process, Brownian motion, fundamental solution, time-dependent membership function.

### 1. はじめに

従来良く知られているように、確率論とファジー理論とは直接の関連はないものと考えられてきた<sup>1)</sup>。しかし、この論文で示すように、この様な捉え方は正しくない。実は両者の間には密接な理論的関係が存在するのである。次の節では、最も簡単な定常確率過程であるガウス過程<sup>2)</sup>、即ち1次元ブラウン運動の基本解の復習から始めよう。

### 2. ブラウン運動の基本解

ブラウン運動の基本解は拡散方程式の解  $U(t, x, y)$  で与えられる：

$$U(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right), \\ (t > 0, -\infty < x, y < \infty) \\ \int_{\mathbf{R}} U(t, x, y) dy = 1 \quad (1 \text{ dimension})$$

今、 $\mathbf{R}$  の任意の部分集合  $V$  に対して  $x$  と  $m_V(x; t)$  との対の集合  $F_V(t)$  を定義する：

$$F_V(t) \equiv \{x \in \mathbf{R}, m_V(x; t)\}, (V \subset \mathbf{R})$$

ここで、 $m_V(x; t)$  は、

$$0 \leq m_V(x; t) \equiv \int_V U(t, x, y) dy \leq 1$$

である。これにより、 $t > 0$  及び  $V$  を任意に固定したとき、 $F_V(t)$  は  $x$  を要素とし、 $m_V(x; t)$  を帰属度関数とする Fuzzy 集合となる。その意味は、点  $x$  にあったブラウン粒子が  $t$  秒後に集合  $V$  の中に移動する（拡散する）という意味の Fuzzy 集合である。言い換えると、帰属度関数  $m_V(x; t)$  の値は、 $t=0$  で  $x$  にあったブラウン粒子が時刻  $t=t>0$  で  $V$  に拡散する度合い（拡散する程度）を示す。その値が0に近ければ  $V$  に拡散する度合いが小さく、逆に1に近ければ  $V$  に拡散する度合いが大きい。ここでは  $x=x_1$  と  $x=x_2$  とを比較している。

$m_V(x; t)$  は別の見方も可能である。即ち、 $t > 0$  及び  $x$  を任意に固定したとき、 $F_V(t)$  の代わりに、対の集合

---

平成7年12月15日受理  
八戸工業大学 情報システム工学研究所 助教授

$$G(x, t) = \{V \subset \mathbf{R}, m_V(x; t)\}, \quad (x \in \mathbf{R})$$

を定義する。 $G(x, t)$  は  $V$  を要素とし,  $m_V(x; t)$  を帰属度関数とする Fuzzy 集合となる。その意味は  $F_V(t)$  のものと同じである。なぜなら, 帰属度関数が共通だからである。ただし, ここでは  $V=V_1$  と  $V=V_2$  を比較している点が異なっている。

時間に依存した帰属度関数  $m_V(x; t)$  を持つ Fuzzy 集合  $F_V(t)$  と  $G(x, t)$  をファジー過程 (Fuzzy Process) と呼ぼう。

### 3. 拡散方程式の初期値問題の解及び半群

良く知られている様に<sup>3)</sup>, 拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

の解は, 初期値

$$u(0, x) = f(x)$$

によって

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (U_t f)(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}} U(t, x, y) f(y) dy \quad t > 0 \end{aligned}$$

で与えられる。積分で定義されたオペレーター  $U_t$  は次の半群の性質を持つ。

$$U_t \cdot U_s = U_{t+s} \quad (t, s > 0)$$

基本解は次の様に Laplace 演算子の固有値を用いて固有関数で展開出来る。

$$\begin{aligned} U(t, x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n(y) \\ (\phi_n(\cdot) &\in L^2(\mathbf{R})) \\ A\phi_n &= -\lambda_n \phi_n, \quad A \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{aligned}$$

上の性質は,  $A$  が楕円型偏微分作用素の場合まで拡張される事が知られている<sup>3)</sup>。従って, ファジー過程の概念は, 単に第2節で述べた場合に止まらず, より一般の確率過程に対しても重要な概念となるだろう。

### 4. ファジー過程の帰属度関数: 数値計算

第2節で述べたファジー過程の, 時間に依存した帰属度関数  $m_V(x; t)$  の具体的な数値を求めるのは容易である。例えば  $G(x, t)$  については次のようになる。

$$m_{[1,4]}(x=2, t=1) = 0.681600$$

$$m_{[-2,2]}(x=2, t=1) = 0.497661$$

$$m_{[0,2]}(x=2, t=1) = 0.421350$$

従って,  $t=0$  で  $x=2$  にあった粒子が時刻  $t=1 > 0$  で  $[1, 4]$ ,  $[-2, 2]$ ,  $[0, 2]$  に拡散する度合いは, 此の順に大きい事が分かる。

### 5. 結論及び展望

最も簡単な定常確率過程であるガウス過程, 即ち1次元ブラウン運動の基本解を用いて, 時間に依存した帰属度関数を導入し,  $F_V(t)$  と  $G(x, t)$  の二つのファジー集合を定義した。その意味は, 拡散する度合いを与えるものである。

我々の方法は, 拡散方程式の Laplace 演算子を, 楕円型偏微分作用素に置き換えても同様に成立する。従って, ブラウン運動の場合に限らず, より一般の定常確率過程に対して Fuzzy 過程が考えられるのである。従って, 確率論と Fuzzy 理論とは偏微分方程式を仲介として密接な関係があると言え得る。

Fuzzy 集合,  $F_V(t)$  と  $G(x, t)$  の線形性や凸性を調べる必要がある。また, 各種の Fuzzy 集合を合成して, 新しい Fuzzy 集合を導入し, 量子力学の観測の理論など, 非線形問題への応用が重要であろう<sup>4-7)</sup>。

### 参考文献

- 1) 西田・竹田: ファジィ集合とその応用, 森北出版 (株) (1988).
- 2) 伊藤 清: 確率論, 岩波書店 (株) (1966).
- 3) 伊藤清三: 偏微分方程式, 培風館 (株) (1966).
- 4) 大黒 茂: Hidden random variable model

- for wave-particle dualism, 日本数学会 1986 年度秋期総合分科会 (応用数学) 講演アブストラクト, pp. 5~8 (1986).
- 5) 大黒 茂: 確率過程に付随するファジィ過程. 計測自動制御学会東北支部第 154 回研究集会資料 154-5, 平成 7 年 6 月 16 日, 八戸工業高等専門学校.
- 6) K. Yoshida: Functional Analysis, Springer, Tokyo (1969).
- 7) 大黒茂: 確率過程に付随するファジー過程について. 日本数学会 1995 年度秋季総合分科会 (応用数学) 講演アブストラクト, pp. 21-1~21-4 (1995).