The Problem of a Metal Disc Capacitor

Shigeru OHKURO

Abstract

The analytic solution of a metal disc capacitor is clarified.

Keywords: Analytic solution (解析的な解), Electric potential (静電ポテンシャル), Parallel disc condenser (平行円盤コンデンサー), Symmetry (対称性), Partial differential equation (偏微分方程式), Cancer hyperthermia (癌温熱療法)

1. はじめに

厚さ0で半径 a の2枚の金属円盤の各々の中心軸が一致するように距離 $2L$ だけ離して平行に置いたコンデンサーを考える。中心軸を z 軸に取り，対称の中心を原点とする円柱座標系 (ρ, φ, z) を取る。この様な場合の静電磁気学は既に研究されているが，解析的に単純で完全な表式を得ることに成功した人は未だいないようである。

ここでは我々に依る，問題の対称性をフルに利用した偏微分方程式の解法の試みについて述べたい。

$z=L$ にある1個の帯電金属円盤による点 (ρ, φ, z) のポテンシャルは Weber の解 $\Phi(\rho, z)$ を用いて次の $\Phi^{\pm}$ で与えられる[1]。

$$\Phi^{\pm}=\Phi(\rho, z\pm L)$$
$$=\pm\frac{q}{a}\sin^{-1}$$
$$\left[\frac{2a}{\sqrt{(\rho-a)^2+(z\pm L)^2}+\sqrt{(\rho+a)^2+(z\pm L)^2}}\right]$$

ここで，q は1個の円盤の電荷である。

そこで我々の問題の対称性から，$z=\pm L$ にある2個のそれぞれ $\pm q$ に帯電した金属円盤による点 (ρ, φ, z) のポテンシャル $F(\rho, z)$ を

$$F(\rho, z)=F(\rho, z;\ \dot{L})$$
$$=A(\rho, z)\Phi^{-}+B(\rho, z)\Phi^{+}$$

の形に仮定して未知関数 $A(\rho, z)$, $B(\rho, z)$ を微分方程式，境界条件，対称性から決定することを試みる。

まず外部で Laplace の方程式

$$\Delta_{(\rho,z)}\Phi^{\pm}=0 \quad (z=\mp L \text{ の円盤の外で})$$

を満たす。ここで，$\Delta_{(\rho,z)}$ は円柱座標系での Laplace 演算子のうち，φ によらない部分である。境界条件は

$$z=L \text{ で}\quad A(\rho, L)=1,\ B(\rho, L)=0$$
$$z=-L \text{ で}\ A(\rho, -L)=0,\ B(\rho, -L)=1$$

である。この小論では，一番簡単な場合として $A(\rho, z)$, $B(\rho, z)$ が ρ に依らない場合を考察した。従って以下では $A(z)$, $B(z)$ の記号を用いる。ポテンシャルは

$$F(\rho, z)=F(\rho, z;\ L)=A(z)\Phi^{-}+B(z)\Phi^{+}$$

となる。次の対称性を使おう。

$$F(\rho, -z)=-F(\rho, z)$$
(2つの円盤の外で)

これから次式を得る。

$$[A(-z)+B(z)]\Phi^{+}+[A(z)+B(-z)]\Phi^{-}=0$$
(2の円盤の外で)

任意の ρ $(\rho>a)$ に対してこの式が成り立つためには

平成8年12月10日受理
八戸工業大学 情報システム工学研究所 助教授

$$A(-z)+B(z)=0$$

でなければならない。即ち，

$$B(z)=-A(-z)$$

が得られる。

ポテンシャルがLaplace方程式を満たすことから次式を得る。

$$(A''\Phi^{-}+2A'\Phi_z^{-})+(B''\Phi^{+}+2B'\Phi_z^{+})=0$$

(2つの円盤の外で)

ここで A', A'', B', B'', $\Phi_z^{\pm}$ は

$$A'=\frac{dA(z)}{dz},\ A''=\frac{d^2A(z)}{dz^2}$$

$$B'=\frac{dB(z)}{dz},\ B''=\frac{d^2B(z)}{dz^2}$$

$$\Phi_z^{\pm}=\frac{\partial\Phi(\rho,\ z\pm L)}{\partial z}$$

で与えられる。

2. 微分方程式と解

ここでは $A(z)$ と $B(z)$ が独立ではないことから，簡単化して次の微分方程式で $A(z)$ を決めることにする。

$$A''\Phi^{-}+2A'\Phi_z^{-}=0$$

これは容易に解けて次式を得る。

$$A(z)=C\int\frac{dz}{(\Phi^{-})^2}+D$$

$$=C\left(\frac{a}{q}\right)^2\cdot$$

$$\int\frac{dz}{\left\{\sin^{-1}\left[\frac{2a}{\sqrt{(\rho-a)^2+(z-L)^2}+\sqrt{(\rho+a)^2+(z-L)^2}}\right]\right\}^2}$$

$$+D$$

$$=\frac{C}{2}\left(\frac{a}{q}\right)^2\cdot$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-(\rho^2+a^2)}\,\arcsin^2\left(\frac{2a}{\sqrt{x-2a\rho}+\sqrt{x+2a\rho}}\right)}$$

$$+D$$

ここで C, D は z に依らない積分定数である。この積分を解析的に表現することには今のところ未だ成功していない。この方向の研究は次回に廻して，以下では円盤上の電荷密度について述べる。

3. 電荷密度と境界条件

$+q$ に帯電した円盤の電荷密度 $\sigma(\rho)$ は上の微分方程式から得られる式

$$A'(z)=\frac{C}{(\Phi^{-})^2}$$

により，次のようになる。

$$\sigma(\rho)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial F(\rho,\ L;\ L)}{\partial z}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{q}{a}\left\{C\left(\frac{a}{q}\right)^2\left\{\frac{2}{\pi}+\left[1/\sin^{-1}\left[\frac{2a}{\sqrt{(\rho-a)^2+(2L)^2}+\sqrt{(\rho+a)^2+(2L)^2}}\right]\right]\right\}-\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right\}\quad=\sigma(\rho;\ a,\ L)$$

積分定数 C は円盤の全電荷が q であるという条件で決まる。

$$q=\int_0^a\sigma(\rho)\rho d\rho$$

さらに2つの金属円盤上では，電位を $\pm V$ とすれば次の境界条件を満たす必要がある。

$$F(\rho,\ L)=V\qquad(0\leq\rho\leq a)$$

$$F(\rho,\ -L)=-V\quad(0\leq\rho\leq a)$$

4. 結　　論

同じ半径の金属円盤のコンデンサーの静電磁気学を円柱座標系を用いて考察し，解析的な表現を目標として定式化を試みた。我々はその過程で種々の簡単化のための仮定を導入した。これらの仮定は問題の対称性に基づいたものであり，コンデンサーから離れた所 $(\rho>a)$ では良い近似になっていると考えられる。ここでの我々の条件を1つずつ緩めていくこと，及びコンデ

ンサーの内部のポテンシャルの正確な解析的表現を求めることは今後の目標としておく[2)]。

我々の問題は最近，癌の温熱治療などに於いて重要性をもっているものである[3)]。

参 考 文 献

1) S. Ohkuro : The boundary value problem of Laplace equation and Newtonian potential : Weber potential versus Coulomb potential, 八戸工業大学紀要，**7**, 141/143 (1988).

2) J. Atkinson, J.H. Young and I.A. Brezovich : An analytic solution for the potential due to a circular parallel plate capacitor, J. Phys. A : Math. Gen., **16**, 2837/2841 (1983).

3) B.D. Hughes : On the potential due to a circular parallel plate capacitor, J. Phys. A : Math. Gen., **17**, 1385/1386 (1984).