Ordinary Differential Equations by Maple

Shigeru OHKURO

Abstract

Ordinary linear differential equations of 2nd order are solved by Computer algebra using Maple software. Present paper treats Homogeneus equations with rational function coefficients. Our results have great infulence on the education of mathematical sciences.

Key words: ordinary differential equations, computer algebra, maple software, linear homogeneus equations with rational function coefficients, education of mathematical sciences

1. はじめに

最近，数式処理・グラフィック描画のパソコンソフトの進歩はめざましい。米国の Mathematica 及びカナダの Maple 等はその代表的なものである。前者は物理学への応用に秀でているが，コマンド名が長い等の実用面での扱いにくさの問題がある。一方後者は宣伝があまり派手でないせいか，前者より知名度で劣っている。しかし，実際に Maple V Release 4 を扱ってみると，数式やコマンドの入力，及び数式の出力において非常に洗練されている点では前者に勝っている。特に数式の出力は，書き直してみなくてもそのままで数式として理解出来る形にデザインされている。この点では，数理科学教育には最適な数少ないパソコン用の数式処理・グラフィック描画用ソフトといえる。また大規模な数値計算には Matlab が適している。ここでは Maple を用いて二階線形微分方程式をパソコンに解かせた結果を報告する。

2. 微分方程式と解

以下では変数係数の二階同次線形微分方程式を扱う。ここではさらに焦点を絞って係数が簡単な有理関数の場合を扱う。この様な微分方程式は以前，文献[1]で取り上げられた。この文献の付録 A における 50 個の微分方程式の中から選んだ。全てが Maple で解けたわけではないが，大部分は解が求まった。解が「初等関数では表せない」となっていたものが，超幾何関数を用いて具体的に解いてくれたものが 1 個あったことは特筆されるべきである。

今やこのようなタイプの多数の微分方程式の解析的な解の形やその典型的なグラフィックスをパソコンで求めることは一定の訓練を積めば容易であり，非線型微分方程式でさえもある種のタイプのものは，少し数学的工夫をすることにより，数式処理で手の届くところにある[2]。その結果を微分方程式辞典とつきあわせてみることは，非常に興味のある重要なステップである。もちろんここで直接おもてに出なくても計算機代数と微分方程式周辺の数学の知識が要求されることは言うまでもない。この段階を経れば，計算機代数と非線型常微分方程式の理論の両者は CyberEpoc にふさわしい新しい段階を迎えることになる。

平成 9 年 12 月 15 日受理
八戸工業大学 情報システム工学研究所 助教授

3. Maple による計算機代数

ここでは

$$y''+p(x)y'+q(x)=0$$

の形の方程式を考える。$p(x)$, $q(x)$ は x の有理関数である。計算機代数の Interactive Session の様子と結果は Appendix に示した[3]。

解が求まったものについては，微分方程式に代入して，間違いなく解であることの確認もやはり計算機代数により行った。この場合にも計算機代数独特の注意と困難と工夫が必要なことは当然であるが，ここでは努めてそれらを表面に出さないように努めた。特に，あたりまえと思われるような，式の変形・簡単化をパソコンで自由自在に行うのはそう容易なことではない。

本研究は，平成 9 年度私立大学等経常費補助金「特別補助（地方の高等教育機関の活性化）」対象事業としての援助を受けているものである。

本研究の一部は，八戸工業大学プロジェクト研究（平成 7 年-9 年）「マルチメディアを利用した理工系科目の教育方法の改革に関する研究」の補助（分担）を受けている。

参考文献

1) 渡辺隼郎：常微分方程式の数式処理，教育出版（1974）
2) S. Ohkuro：準備中
3) B.W. チャー，K.O. ゲディス 他：はじめての Maple V，シュプリンガー・フェアラーク東京（1993）; K.H. Heal, M. L. Hansen & K. M. Rickard: Maple V Learning Guide, Waterloo Maple Inc. (Canada) (1996)

Appendix

以下に実際の数式処理の結果を示した。

```
> p(x) := (2*x^3-10*x)/(x^4-1);  q(x) := (16*x^4+16)/(x^4-1)^2;
```

$$p(x) := \frac{2\ x^3 - 10\ x}{x^4 - 1}$$

$$q(x) := \frac{16\ x^4 + 16}{(x^4 - 1)^2}$$

```
> de4:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de4 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ y(x)\right) + \frac{(2\ x^3 - 10\ x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\ y(x)\right)}{x^4 - 1} + \frac{(16\ x^4 + 16)\ y(x)}{(x^4 - 1)^2} = 0$$

```
> soln4:=dsolve(de4,y(x));
```

$$soln4 := y(x) = \frac{\_C1\ e^{(-\sqrt{3}\ (-\ln(1 - I\ x) + \ln(1 + I\ x)))}\ (x^2 - 1)}{x^2 + 1} + \frac{\_C2\ (x^2 - 1)\ e^{(\sqrt{3}\ (-\ln(1 - I\ x) + \ln(1 + I\ x)))}}{x^2 + 1}$$

```
> simplify(");
```

$$y(x) = \frac{(x^2 - 1)\left(\frac{(-x - I)^{(\sqrt{3})}\ \_C1}{(x - I)^{(\sqrt{3})}} + \frac{(x - I)^{(\sqrt{3})}\ \_C2}{(-x - I)^{(\sqrt{3})}}\right)}{x^2 + 1}$$

```
> subs(y(x)=soln4, lhs(de4));
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ y(x)\right) + \frac{(2\ x^3 - 10\ x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\ y(x)\right)}{x^4 - 1} + \frac{(16\ x^4 + 16)\ y(x)}{(x^4 - 1)^2} =$$

$$8\ \frac{\_C1\ e^{(-\%1)}\ (x^2 - 1)\ x^2}{(x^2 + 1)^3} + 4\ \frac{\_C1\ \sqrt{3}\left(\frac{I}{1 - I\ x} + \frac{I}{1 + I\ x}\right) e^{(-\%1)}\ (x^2 - 1)\ x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$-8\ \frac{\_C1\ e^{(-\%1)}\ x^2}{(x^2 + 1)^2} - 2\ \frac{\_C1\ e^{(-\%1)}\ (x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$-\frac{\_C1\ \sqrt{3}\left(-\frac{1}{(1 - I\ x)^2} + \frac{1}{(1 + I\ x)^2}\right) e^{(-\%1)}\ (x^2 - 1)}{x^2 + 1}$$

$$+3\ \frac{\_C1\left(\frac{I}{1 - I\ x} + \frac{I}{1 + I\ x}\right)^2 e^{(-\%1)}\ (x^2 - 1)}{x^2 + 1}$$

$$-4\,\frac{\_C1\,\sqrt{3}\left(\frac{I}{1-I\,x}+\frac{I}{1+I\,x}\right)e^{(-\%1)}\,x}{x^2+1}+2\,\frac{\_C1\,e^{(-\%1)}}{x^2+1}$$
$$+8\,\frac{\_C2\,(x^2-1)\,e^{\%1}\,x^2}{(x^2+1)^3}-8\,\frac{\_C2\,x^2\,e^{\%1}}{(x^2+1)^2}$$
$$-4\,\frac{\_C2\,(x^2-1)\,\sqrt{3}\left(\frac{I}{1-I\,x}+\frac{I}{1+I\,x}\right)e^{\%1}\,x}{(x^2+1)^2}-2\,\frac{\_C2\,(x^2-1)\,e^{\%1}}{(x^2+1)^2}$$
$$+2\,\frac{\_C2\,e^{\%1}}{x^2+1}+4\,\frac{\_C2\,x\,\sqrt{3}\left(\frac{I}{1-I\,x}+\frac{I}{1+I\,x}\right)e^{\%1}}{x^2+1}$$
$$+\frac{\_C2\,(x^2-1)\,\sqrt{3}\left(-\frac{1}{(1-I\,x)^2}+\frac{1}{(1+I\,x)^2}\right)e^{\%1}}{x^2+1}$$
$$+3\,\frac{\_C2\,(x^2-1)\left(\frac{I}{1-I\,x}+\frac{I}{1+I\,x}\right)^2 e^{\%1}}{x^2+1}+(2\,x^3-10\,x)\Bigg($$
$$-2\,\frac{\_C1\,e^{(-\%1)}\,(x^2-1)\,x}{(x^2+1)^2}-\frac{\_C1\,\sqrt{3}\left(\frac{I}{1-I\,x}+\frac{I}{1+I\,x}\right)e^{(-\%1)}\,(x^2-1)}{x^2+1}$$
$$+2\,\frac{\_C1\,e^{(-\%1)}\,x}{x^2+1}-2\,\frac{\_C2\,(x^2-1)\,e^{\%1}\,x}{(x^2+1)^2}+2\,\frac{\_C2\,x\,e^{\%1}}{x^2+1}$$
$$+\frac{\_C2\,(x^2-1)\,\sqrt{3}\left(\frac{I}{1-I\,x}+\frac{I}{1+I\,x}\right)e^{\%1}}{x^2+1}\Bigg)\Bigg/(x^4-1)$$
$$+\frac{(16\,x^4+16)\left(\frac{\_C1\,e^{(-\%1)}\,(x^2-1)}{x^2+1}+\frac{\_C2\,(x^2-1)\,e^{\%1}}{x^2+1}\right)}{(x^4-1)^2}$$
$$\%1 := \sqrt{3}\,\left(-\ln(1-I\,x)+\ln(1+I\,x)\right)$$

```
> simplify(");
```

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right)x^8-2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right)x^4+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right)+2\,x^7\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right)\right.$$
$$\left.-2\,x^3\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right)-10\,x^5\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right)+10\,x\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right)+16\,y(x)\,x^4+16\,y(x)\right.$$

$$\Big) \Big/ (x^4-1)^2 = 0$$

```
> p(x):=4/(x*(x-1)); q(x):=2*x/(x*(x-1))^2;
```

$$p(x) := \frac{4}{x\,(x-1)}$$

$$q(x) := \frac{2}{x\,(x-1)^2}$$

```
> de5:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de5 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right) + 4\,\frac{\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)}{x\,(x-1)} + 2\,\frac{y(x)}{x\,(x-1)^2} = 0$$

```
> soln5:=dsolve(de5,y(x));
```

$$soln5 := y(x) = \frac{\_C1\,(x-2)}{x-1} + \frac{\_C2\,(x^3-3\,x^2-15\,x+18+6\,\ln(x-1)\,x^2-18\,\ln(x-1)\,x+12\,\ln(x-1))}{(x-1)^2}$$

```
> subs(y(x)=soln5,lhs(de5));
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right) + 4\,\frac{\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)}{x\,(x-1)} + 2\,\frac{y(x)}{x\,(x-1)^2} = 2\,\frac{\_C1\,(x-2)}{(x-1)^3} - 2\,\frac{\_C1}{(x-1)^2} + \_C2$$

$$\Bigg(6\,x-6-6\,\frac{x^2}{(x-1)^2}+24\,\frac{x}{x-1}+12\,\ln(x-1)+18\,\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{36}{x-1}-\frac{12}{(x-1)^2}$$

$$\Bigg) \Big/ (x-1)^2 - 4\,\_C2$$

$$\left(3\,x^2-6\,x-15+6\,\frac{x^2}{x-1}+12\,\ln(x-1)\,x-18\,\frac{x}{x-1}-18\,\ln(x-1)+\frac{12}{x-1}\right) \Big/$$

$$(x-1)^3 + 6\,\frac{\_C2\,\%1}{(x-1)^4} + 4\left(-\frac{\_C1\,(x-2)}{(x-1)^2}+\frac{\_C1}{x-1}+\_C2\right.$$

$$\left(3\,x^2-6\,x-15+6\,\frac{x^2}{x-1}+12\,\ln(x-1)\,x-18\,\frac{x}{x-1}-18\,\ln(x-1)+\frac{12}{x-1}\right) \Big/$$

$$\left.(x-1)^2 - 2\,\frac{\_C2\,\%1}{(x-1)^3}\right) / (x\,(x-1)) + 2\,\frac{\frac{\_C1\,(x-2)}{x-1}+\frac{\_C2\,\%1}{(x-1)^2}}{x\,(x-1)^2}$$

$$\%1 := x^3-3\,x^2-15\,x+18+6\,\ln(x-1)\,x^2-18\,\ln(x-1)\,x+12\,\ln(x-1)$$

```
> simplify(");
```

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)x^3-2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)x^2+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)x+4\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)x-4\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)+2\,\mathrm{y}(x)\right)\Big/\left(x\,(x-1)^2\right)=0$$

```
> p(x):=2*x/(x^2-1); q(x):=-2*(x^2-1)/(x^2-1)^2;
```

$$\mathrm{p}(x) := 2\,\frac{x}{x^2-1}$$

$$\mathrm{q}(x) := -\frac{2}{x^2-1}$$

```
> de6:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de6 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)+2\,\frac{x\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)}{x^2-1}-2\,\frac{\mathrm{y}(x)}{x^2-1}=0$$

```
> soln6:=dsolve(de6,y(x));
```

$$soln6 := \mathrm{y}(x)=\_C1\;x+\_C2\left(-\frac{1}{2}\ln(x-1)\;x+\frac{1}{2}\ln(x+1)\;x-1\right)$$

```
> subs(y(x)=soln6,lhs(de6));
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)+2\,\frac{x\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)}{x^2-1}-2\,\frac{\mathrm{y}(x)}{x^2-1}=$$

$$\_C2\left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\,\frac{x}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}\right)$$

$$+2\,\frac{x\left(\_C1+\_C2\left(-\frac{1}{2}\,\frac{x}{x-1}-\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{2}\,\frac{x}{x+1}+\frac{1}{2}\ln(x+1)\right)\right)}{x^2-1}$$

$$-2\,\frac{\_C1\;x+\_C2\left(-\frac{1}{2}\ln(x-1)\;x+\frac{1}{2}\ln(x+1)\;x-1\right)}{x^2-1}$$

```
> simplify(");
```

$$\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)x^2-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)+2\,x\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)-2\,\mathrm{y}(x)}{x^2-1}=0$$

```
> Quit;
```

Quit

```
>
```