立体4目並べの数理

苫米地　宣　裕*

Theory of the Cubic Line-4 Tic-Tac-Toe

Nobuhiro TOMABECHI

Abstract

The purpose of this study is realization of artificial intelligence needed for the programs playing thinking games such as Shogi, Go, Tic-Tac-Toe, and so on. This paper studies on the cubic line-4 Tic-Tac-Toe which has simplified rules and a wide search space suitable for introduction to game playing programs. As the first step, this paper makes clear the mathematical characters of the cubic line-4 Tic-Tac-Toe, which will be used for making the game program in the next step.

Key words: artificial intelligence/ thinking game/ cubic line-4/ tic-tac-toe/ theory

1. まえがき

将棋，碁，連珠のような思考ゲームをプレイするプログラムの研究は，人工知能研究上の多くの課題を含んでおり，最近，ようやく情報科学の重要な1分野として認められるようになった [1]。本研究は，立体4目並べをとり上げ，それをプレイするロボットの実現を通して，人工知能の探求をしようというものである。立体4目並べは，ルールが簡単で，かつ，探索空間が 16^{64} のオーダという十分大きな広さを持ち，思考ゲームロボットの入門的課題として適していると思われる。なお，立体4目並べについて論じた文献はほとんどなく，文献 [2] がわずかに触れているだけである。

まず，本ゲームの数学的な性質を導く。次に，探索アルゴリズムを導く。次いで，プレイングプログラムを作成する。本稿では，まず，本ゲームの数学的性質を明らかにする。

2. ルールと用語

2.1 ルール

[ルール1] 4×4×4の格子点を有する3次元立方体の盤を用いる。

[ルール2]先手と後手が，交互に盤に石を置いていく。石は，盤の下から上に積み重ねるように置く。

[ルール3] 先に，縦，横，斜め，いずれかの方向の4連ができた方を勝ちとする。

2.2 用語

とくに定義しないものは，通常の5目並べの用語と同様とする。

[表現1] 座標，着点：盤の座標を（*xyz*）と表す。座標（*xyz*）への先手の着点を *axyz*，後手の着点を *bxyz* と表す。

[定義1] 角，辺：通常の立方体における角，辺を，盤の角，辺という。

[定義2]面，外面：縦，横，斜の同一平面上にある16個の点の集合を面という。面の中で盤の外形を形成する面を外面という。面は，指定された座標軸とその座標軸の値で表す。例えば，$x=1$ で指定される面を $x1$ 面と表わす。$z1$ 面を底面，$z4$ 面を上面，底面と上面以外の外面を側面という。

[定義3] 核：外面に含まれない点の集合，すなわち，(222)，(223)，(232)，(233)，(322)，(323)，(332)，(333) の8個の点を核という。

[定義4] 決勝点：そこに着手すると4連が完成する点をいう。

[定義5] n 段決勝点：$z=n$ である決勝点をいう。$n=2$ のときは2段決勝点，$n=3$ のときは，3段決勝点，$n=4$ のときは，4段決勝点という。2段決勝点と4段決勝点をまとめて偶数段決勝点という。

[定義6] ライン：4連となりうる4個の点をいう。二つの端の点を ($x1y1z1$)，($x2y2z2$) とすると，ラインは，$x1y1z1-x2y2z2$ と表す。

3. ゲームの性格

はじめに，ゲームの基本的性格について論ずる。以下，明らかになった知識の中で証明可能な厳密なものは，[法則] とよび，それ以外の知識は，単に [知識] とよぶ。

[性格1] 連の方向が3次元となる。

[性格2] 盤の寸法が4に限定されているので，両端が開放された3連ができない。すなわち，単独の3連は必

平成10年12月21日受理
*八戸工業大学 電気工学科 教授

ず止めることができる。従って，5目並べのような3-3は，見逃さない限り必ず止めることができる。

［性格3］下の段から順次上の段に着手するため，将来その段に石を置くと4連が完成するという決勝点という概念が生ずる。

［性格4］先手に先着の有利さがあるが，後手が正しく応対すれば，ゲームの中途で勝敗が決することはなく，最終局面に到達する。最終局面では，次に示す法則1に述べるように，先手の3段決勝点があれば先手の勝ちとなる。先手の3段決勝点がなければ，後手の勝ちとなる（引き分けはあるが，後手の負けはない）。従って，ゲームは先手が先着の有利さを生かしていかに3段決勝点をつくるか，後手がいかにそれを防ぐかが焦点となる。このように，見かけによらず著しく非対称なゲームである。

次に，法則1を示す。まず，次の用語を定義する。

［定義7］局面 Z：決勝点を含む列を除いたすべての列に石が置かれ，かつ，決勝点を含むすべての列に石が置かれていない局面を局面 Z という。

［補題1］局面 Z の次の手番は先手番である。

（証明）すべての列が4段（偶数）なので，自明である。

［法則1］先手の3段決勝点があると先手の勝ちとなる。また，先手の3段決勝点がなければ後手の勝ちとなる。ただし，後述するいくつかの条件が成り立つ場合は除く。

（証明）先手の3段決勝点が1個だけ存在すると仮定する。局面 Z を考える。以下，3段決勝点の列を，先手が第1段，後手が第2段，先手が第3段と打っていくことになる。従って，最終的に先手が3段決勝点を打つことになる。先手の3段決勝点がない場合，後手に偶数段決勝点があれば後手の勝ち，なければ引き分けとなる。なお，偶数段決勝点は，先手後手によらず容易につくることができる。

なお，本ゲームは，盤の形状を，5×5×5とするなど，多くのバリエーションが考えられる。それによって，ゲームの様相が全く変わってくる。

4. 序盤の知識

4.1 生じ得る連の数による着手の評価

座標の位置によって生じ得る連の数に相違がある。

［知識1］座標の価値：座標の価値を，その座標を含む生じ得る4連の個数で表すことができる。生じ得る4連の数が n 個の場合，その座標の価値は n 点であるという。各座標の価値は次のようになる。

角：7点

核：7点

その他の点：4点

価値の高い座標から着手していくのが，序盤における着手の指針となる。従って，最初に底面の4つの角から着手することとなる。

［知識2］着点の価値：着点の価値は，座標が同じでも先に置かれた石の状況によって異なる。着点の価値は，その着点を含む生じ得る4連の個数で表すことができる。相手の置いた石があって連としての発展性が失われている場合でも，その着点を加えることによって，相手の連の発展性を妨げる場合は，生じ得る連の個数に加える。ただし，自分の置き石があって相手の連の発展性をすでに妨げている場合は数えない。なお，自分の置き石があって，連の方向が一致する場合でも，生じ得る連の個数に加える。

4.2 3段決勝点の観点から見た着手の評価

生じ得る連の数による価値だけでなく，3段決勝点の観点から見た価値も考慮する必要がある。

［知識3］核の2段目への着手：核の2段目は急いで着手しない方がよい。核の2段目が価値が高いといっても，相手がすぐにその上の3段目に着手すると得点が相殺される。さらに，3段決勝点をつくる観点からは，2段目の点よりも3段目の点の方が有利である。

［知識4］核の3段目への着手：核の3段目は3段決勝点をつくるのに直接寄与する。従って，相手が核の2段目に着手したら，原則として直ちにその上に着手すべきである。

［知識5］角の上の2段目への着手：角の上の2段目は価値が高い（とくに，2連が生ずるときは価値が高い）ので，できるだけ早く着手するとよい。その理由は，相手がその上の3段目に置くと，次にさらにその上の角を占めることができるので，相手は容易に3段目に置くことができないからである。

［知識6］角の上の3段目への着手：3連となるときは，いつでも先手で着手できるので急いで着手しない方がよい。3連とならないときで，その上の角に相手が着手すると3段決勝点を含むラインが生ずる場合も急いで着手しない。逆に，そのような相手のラインが生じないときは，3段決勝点に寄与することが多いので早く着手した方がよい。

［知識7］角以外の側面の3段目への着手：相手がその上の4段目に着手するとラインが形成されるときは着手しない方がよい。そうでないときは着手しても問題はないし，3段決勝点に寄与するときは，早く着手した方がよい。

［知識8］側面の4段目への着手：3段決勝点を含むラインが形成されるときは，できるだけ早く着手する。そうでないときは最も価値が低いので最後に着手する。

［知識9］側面以外の4段目への着手：側面以外の面の4段目は価値が最も低い。従って，最後に着手することとなる。

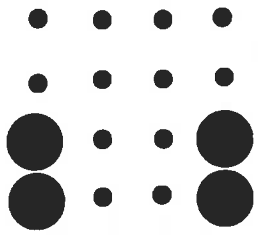

図 1　決勝パターン1

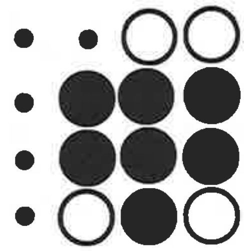

図 3　決勝点が 2 段連続する例1

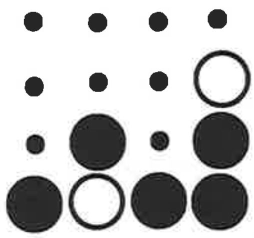

図 2　決勝パターン2

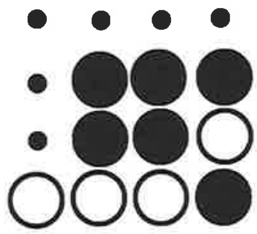

図 4　決勝点が 2 段連続する例2

5.　中盤の知識

［知識 10］決勝パターン：次のパターンができ，かつ，次が●の手番ならば，3 追い勝ちとなる。例を図 1，図 2 に示す。

このバリエーションの決勝パターンは多数存在する。

［知識 11］連続決勝点：決勝点が二つの段に連続すると，手番によらず必勝となる。例を図 3，図 4 に示す。

図 3，図 4 は，3 連が同一面に生じた例を示しており容易に認識できるが，3 連が異なる面に含まれる場合は認識がしにくくなる。

［知識 12］その他の勝ち方：決勝点を予めつくって置き，その直ぐ下に石(自分の石でも相手の石でもよい)がくるように 3 追をつくる。

6.　終盤の知識

6.1　勝敗に関する法則

はじめに示した法則 1 の補足条件，および，それ以外の終局近くにおいて勝敗に関係する諸法則を示す。

［法則 2］先手の偶数段決勝点は勝ちに寄与しない。

(証明)先手の 3 段決勝点が存在せず，偶数段決勝点がいくつか存在すると仮定する。局面 Z を考える。以下，先手は奇数の段を後手は偶数の段を打っていくことになる。従って，先手は自分の偶数段決勝点を打つことができない。

［法則 3］後手の 3 段決勝点は後手の勝ちには寄与しない。

(証明)局面 Z を考える。以下，先手は奇数の段を後手は偶数の段を打っていくことになる。従って，最終的に後手の 3 段決勝点は先手が打つこととなるので，後手の 3 段決勝点は後手の勝ちには寄与しない。

［法則 4］先手の 3 段決勝点がある場合でも，後手に先手と同じ数の 3 段決勝点がある場合は引き分け，または，後手の勝ちとなる。引き分けは，後手に偶数決勝点がない場合であり，後手の勝ちは，後手に偶数決勝点がある場合である。

(証明) 先手，後手とも 1 個づつの 3 段決勝点があり，かつ，どちらにも偶数段決勝点がないとする。局面 Z を考える。以下，先手が先手の列の第 1 段，後手が後手の列の第 1 段，先手が先手の列の第 2 段，後手が先手の列の第 3 段，先手が先手の列の第 4 段，後手が後手の列の第 2 段，先手が後手の段の第 3 段，……と進んで，先手，後手ともに自分の 3 段決勝点を打つことができない。

後手に偶数段決勝点がある場合には，上記のように，偶数段決勝点の列を除くすべての点の着手を終わった局面を考えると，次は先手の手番となる。従って，後手が偶数段決勝点を打って勝つこととなる。

［法則 5］先手の 3 段決勝点の個数が後手の 3 段決勝点の個数よりも多い場合は先手の勝ち，後手の個数の方が多い場合は後手の勝ちとなる。

(証明) これまでの論議から自明なので省略する。

［法則 6］3 段決勝点の直ぐ下に相手の 2 段決勝点がある場合は，3 段決勝点は無効となる。

［法則 7］3 段決勝点が，先手と後手の共通の決勝点になった場合は，先手の決勝点と数える。ただし，そのような数が偶数個生じたときは，全部を後手の 3 段決勝点 1 個と数える。3 以上の奇数個生じたときは，全部を先手の 3 段決勝点 1 個と数える。

6.2　3 段決勝点の作り方

［知識 13］3 段決勝点を作る方法は次の 2 つである。

① 3段目に2連をつくり3連にのばす方法

② ラインとなる4段目に石を置き，これを飛び3連にする方法

[法則8] 先手の3段2連が3段3連になるには，次の条件1～条件3のいずれかが必要である。

条件1：他の2列のいずれかに自分の偶数段決勝点があること。

条件2：他の2列のいずれかの3段目に3追いで自分の石を置けること。

条件3：他の2列のいずれかの2段目に,3追いで自分の石か相手の石を強制的に置かせられること。

(証明)先手の3段2連が存在する面の他の2つの段を除いた局面 Z を考える。条件1～条件3のいずれかがなければ，次は先手の手番であるから，先手は1方の1段目に着手，後手は他方の1段目に着手，先手どちらかの2段目に着手,後手その上に着手となって,先手3段3連ができない。逆に，条件1～条件3があれば，3段3連になり得ることは自明である。

[法則9] 先手の4段目の石を含むラインが飛び3連になるには，次の条件1，条件2のいずれかが必要である。

条件1：1段目の石から数えて3番目の列に自分の偶数段決勝点があること。

条件2：1段目の石から数えて2番目の列の2段目に3追いで自分の石を置けること。

(証明) 法則8の証明と同様となる。

3段3連をつくるためには，まず，3段2連をつくる必要がある。

[法則10] 3段2連をつくるには，次の条件1～条件3のいずれかが必要である。

条件1：4段決勝点があること。

条件2：相手が3段目に置くと，自分にその上の4段目を始点とするラインが生ずること。

条件3：他の面の3追いによって2段目に先着できること。

3段目1連を確保すると,第2の3段目の石は,着手の順序が先手1段目，後手2段目，先手3段目となるので，容易につくることができる。

7. むすび

本研究は，立体4目並べをプレイするロボットの実現を通して，人工知能の探求をしようとしている。本稿では，第1段階として，本ゲームの数学的性質を明らかにした。

次の段階では，プレイイングプログラムを作成する予定である。本ゲームは探索空間が広く悉皆探索はできないので，ある深さまで先読み探索をした段階で局面評価を行い着手を決めることとなる。評価に当たっては，生じ得る4連の個数に基づいた評価だけでなく，3段決勝点をつくる観点からの評価が必要となる。この3段決勝点の観点からの評価をどのように数値化するかが大きな課題となる。

本ゲームは3次元の形状なので，通常のデスプレイ画面ではゲームの進行状況を十分に表現することができない。このため，実際の盤と石を用いてゲームをプレイするロボットハンドがあると有効となる。次の段階では，その点も含めて検討する予定である。

なお，本研究の遂行に当たり，八戸工業大学苫米地研究室の学生諸氏，とりわけ，塩田重明氏が対戦相手となって寄与したことを付記する。

参考文献

[1] 飯田弘之，“ゲームプログラミングの発展とAI，” 情報処理，Vol. 37, No. 6, pp. 536-542, 1996-6.

[2] R.B. バナージ著，高原，中野，宇治橋訳，“人工知能，コンピュータによるゲーム，” 共立出版，1983.