

Computer Algebra of Integral Transform with Maple

Shigeru OHKURO*

Abstract

Laplace transforms of many kinds of functions are treated by a personal computer using MAPLE software as a typical example of integral transforms of functions. The inverse Laplace transforms are also tried to compute, which show the limitation of the present MAPLE software in computer algebra. Our point of view have great significance in the education of mathematical sciences at colleges: There will appear the new way of introduction to mathematical sciences at college level just as there exists an experimental introduction to physics, i.e. Experimental physics. The important point of our approach is “be accustomed to mathematical formulae than simply follow an abstract theories of mathematics.”

Keywords: integral transform (積分変換), personal computer (パソコン), Maple (メイプル), computer algebra (計算機代数), education (教育), mathematical science (数理科学)

1. はじめに

パソコンの数式処理ソフトの進歩はめざましい¹⁾。応用数学の研究には無くてはならぬ存在になってきた。自分で新しい理論の枠組みを構成したとき、具体的に数式で計算する必要にせまられる²⁾。この様なとき、新しいタイプの数式計算に計算機代数は威力を発揮し、筆算では長い複雑な計算もあったという間に実行してくれるのはありがたい。計算機代数に一度慣れると手放せない理由である。

ここでは Maple による積分変換の計算機代数の実例を各種の関数³⁾ に対して行った結果を報告する。積分変換として特に今回は Laplace 変換 `inttrans [laplace](・,x,s)` とその逆変換 `inttrans [invlaplace](・,s,x)` を調べた。

2. 数式処理の実例

ここでは数式処理ソフト Maple を用いて、パソコンによりラプラス変換の計算を自動的に行う様子について紹介します。

```
> restart;
> assume(s>0);
> assume(alpha>0);
> Lintt26:=int(exp(-s*x)*x^(alpha-1)*cos(b*x),x=0..infinity);
```

$$\text{Lintt26} := \int_0^{\infty} e^{(-s \cdot x)} x^{(\alpha-1)} \cos(b \cdot x) dx$$

```
> Lint26:=inttrans[laplace](x^(alpha-1)*cos(b*x),x,s);
```

$$\text{Lint26} := \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha)}{(s+ib)^{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha)}{(s-ib)^{\alpha}}$$

この式を, s, b, alpha の関数として使いたい時は, 次のように定義します。

```
> Lintf26:= (s,b,alpha) ->
1/2/((s+I*b)^alpha)*GAMMA(alpha)+1/2/((s-I*b)^alpha)*GAMMA(alpha);
```

$$\text{Lintf26} := (s, b, \alpha) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha)}{(s-ib)^{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha)}{(s+ib)^{\alpha}}$$

実際,

> **Lintf26(s,b,alpha);**

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha \sim)}{(s \sim - / b)^{\alpha \sim}} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha \sim)}{(s \sim + / b)^{\alpha \sim}}$$

さて, Laplace 逆変換は次のようにします。

> **inttr26:=inttrans[invlaplace](Lint26,s,x);**

$$\text{inttr26} := \frac{1}{2} \Gamma(\alpha \sim) \text{invlaplace} \left(\frac{1}{(s \sim - / b)^{\alpha \sim}}, s \sim, x \right) + \frac{1}{2} \Gamma(\alpha \sim) \text{invlaplace} \left(\frac{1}{(s \sim + / b)^{\alpha \sim}}, s \sim, x \right)$$

計算をしてくれませんか。この辺がこのソフトの現在の限界のようです。次に進みましょう。

> **Lintt27:=Int(exp(-s*x)*sin(x^2),x=0..infinity);**

$$\text{Lintt27} := \int_0^{\infty} e^{(-s \sim x)} \sin(x^2) dx$$

> **Lint27:=inttrans[laplace](sin(x^2),x,s);**

$$\begin{aligned} \text{Lint27} := & \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \sin\left(\frac{1}{4} s^2\right) \left(\frac{1}{2} - \text{FresnelS}\left(\frac{1}{2} \frac{s \sim \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \cos\left(\frac{1}{4} s^2\right) \left(\frac{1}{2} - \text{FresnelC}\left(\frac{1}{2} \frac{s \sim \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right) \right) \end{aligned}$$

ここでは, フレネルの積分指数関数が現れます。右辺の数式表現を変える時は, 例えば

> **simplify(Lint27);**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \sin\left(\frac{1}{4} s^2\right) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \sin\left(\frac{1}{4} s^2\right) \text{FresnelS}\left(\frac{1}{2} \frac{s \sim \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right) + \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \cos\left(\frac{1}{4} s^2\right) \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \cos\left(\frac{1}{4} s^2\right) \text{FresnelC}\left(\frac{1}{2} \frac{s \sim \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right) \end{aligned}$$

さて,

> **Lintf27:= s ->**

1/2*2^(1/2)*Pi^(1/2)*sin(1/4*s^2)*(1/2-FresnelS(1/2*s*2^(1/2)/Pi^(1/2)))+1/2*2^(1/2)*Pi^(1/2)*cos(1/4*s^2)*(1/2-FresnelC(1/2*s*2^(1/2)/Pi^(1/2)));

$$\begin{aligned} \text{Lintf27} := & s \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \sin\left(\frac{1}{4} s^2\right) \left(\frac{1}{2} - \text{FresnelS}\left(\frac{1}{2} \frac{s \sim \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \cos\left(\frac{1}{4} s^2\right) \left(\frac{1}{2} - \text{FresnelC}\left(\frac{1}{2} \frac{s \sim \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right) \right) \end{aligned}$$

> **inttr27:=inttrans[invlaplace](Lint27,s,x);**

$$\begin{aligned} \text{inttr27} := & \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \\ & \left(\frac{1}{2} \text{invlaplace} \left(\sin\left(\frac{1}{4} s^2\right), s \sim, x \right) - \text{invlaplace} \left(\sin\left(\frac{1}{4} s^2\right) \text{FresnelS}\left(\frac{1}{2} \frac{s \sim \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right), s \sim, x \right) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2} \text{invlaplace} \left(\cos \left(\frac{1}{4} s^2 \right), s, x \right) - \text{invlaplace} \left(\cos \left(\frac{1}{4} s^2 \right) \text{FresnelC} \left(\frac{1}{2} \frac{s \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right), s, x \right) \right)$$

> **wa(x):=sum(c(n)*x^n/n!,n=0..infinity);**

$$wa(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c(n) x^n}{n!}$$

> **Lintt29:=Int(exp(-s*x)*wa(x),x=0..infinity);**

$$Lintt29 := \int_0^{\infty} e^{(-s x)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c(n) x^n}{n!} \right) dx$$

> **Lint29:=inttrans[laplace](wa(x),x,s);**

Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.

Need to know the sign of $\rightarrow n+1$

Will now try indefinite integration and then take limits.

$$Lint29 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c(n) \text{laplace}(x^n, x, s)}{n!}$$

> **assume(n, integer, n >= 0);**

> **intrr29:=inttrans[invlaplace](Lint29,s,x);**

$$\text{intrr29} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c(n) x^n}{n!}$$

> **Lintt30:=Int(exp(-s*x)*Heaviside(x),x=0..infinity);**

$$Lintt30 := \int_0^{\infty} e^{(-s x)} \text{Heaviside}(x) dx$$

> **Lint30:=inttrans[laplace](Heaviside(x),x,s);**

$$Lint30 := \frac{1}{s}$$

> **Lintf30:= s -> 1/s;**

$$\text{Lintf30} := s \rightarrow \frac{1}{s}$$

> **intrr30:=inttrans[invlaplace](Lint30,s,x);**

$$\text{intrr30} := 1$$

逆変換したものは Heaviside 関数を再現しないことに注意しましょう。

assume(a>0);

> **Lintt31:=Int(exp(-s*x)*Dirac(x-a),x=0..infinity);**

$$Lintt31 := \int_0^{\infty} e^{(-s x)} \text{Dirac}(x - a) dx$$

> **Lint31:=inttrans[laplace](Dirac(x),x,s);**

$$Lint31 := 1$$

> **intrr31:=inttrans[invlaplace](Lint31,s,x);**

$$\text{intrr31} := \text{Dirac}(x)$$

逆変換は、ちゃんと Dirac 関数（より正しくは、“超関数”）を再現しました。

> **Quit;**

Quit

3. 結 論

パソコンソフト Maple 5 Release 4¹⁾ による計算機代数の実例として Laplace 変換と逆変換について Maple の実力の程度を調べた。前者についてはかなり強力な計算能力を持っているが、逆変換については現在まだ限界があることが分かった。超関数の簡単なものについても実験してみた。

我々の観点は大学における数理科学教育にとって重要な意味を持つ。即ち、数理科学教育への新しい方法論を提案している。丁度物理学における実験物理の存在のようなものである。次の様にも言える。「抽象的な数学理論を学ぶだけでなく数式に馴染もう。」

この論文は平成 10 年度地方活性化経費補助を受けている。

参 考 文 献

- 1) D. Redfern: The Maple Handbook: Maple 5 Release 4, Springer (1996)
- 2) Shigeru OHKURO: Integral Transforms and Computer Algebra, 計測自動制御学会東北支部第 175 回研究集会資料 175-12 (1998. 6); Shigeru OHKURO: Symmetry of Imaginary Unit and a Generalization of Integrals, International Congress "Nonlinear Analysis and It's Applications" Moscow-Russia, September 1-5, 1998 (CD-ROM Proceedings in preparation); 大黒茂: New Integrals and Experimental Mathematics, 日本数学会 1998 年度秋季総合分科会講演予稿集 (応用数学) (1998. 10) 98-101
- 3) 森口, 宇田川, 一松: 数学公式 1, 岩波書店 (1981)