波動論に立脚した振動論

穐 山 和 男

1．序言

連続体の振動は，内部に生じた定常波により起る。また進行波と定常波の位相速度の分散関係は同一である。

本論文は，進行波の位相速度曲線を出発点にすえ，連続体の振動を根本から考え直したものである。いくつかの計算結果を示す。

2．計算方法及び計算モデル

位相速度曲線に基づき構成したラグランジュの方程式[1]により固有値を求めた。また比較検討のため，微分方程式から出発して求める方法[2), 3), 4)]でも計算を行った。前者をラグランジュ法，後者を数値積分法と呼ぶことにする。計算モデルは直線テーパーの片持梁とした。解析例もいくつか示す。初等理論の範囲で考える。

3．ラグランジュ法の概要

3．1　縦振動

ω_0：縦波の角振動数

γ_0：縦波の伝播定数

R：横断面の回転半径

E：ヤング率

ρ：密度

$c_0 = \sqrt{E/\rho}$

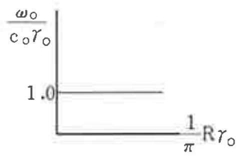

図1

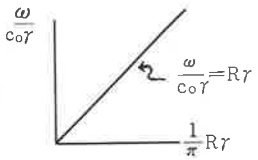

図2

とすれば，縦波の位相速度曲線は図1のようである。従って，縦波の伝播定数γ_0は

$$\gamma_0 = \text{const.}\ (\text{Rによらない。}) \quad \cdots\cdots (1)$$

式(1)のもとで境界条件を満足する関数族$\{X_r\}$ (r ＝1，2，…)

$$X_r = A_r \sin\gamma_{0r} z + B_r \cos\gamma_{0r} z \quad \cdots\cdots (2)$$

を求める。即ち係数比を定める。しかし直交関係

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^L \rho S X_r X_s dz = 0 \\ &\int_0^L E S X'_r X'_s dz = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

$(r \neq s)$

が成立すれば，係数比を定める際に求めたω_0が，求める角振動数となる。ここで，Sは断面積であり，ダッシュ'′'はzに関する微分である。

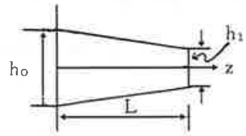

図3　計算モデル

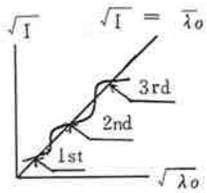

図4

式(3)の直交関係が成立しないので，振動数方程式は、次のようになる。

$$\det |a_{rs}| = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

$(r, s = 1, 2, \cdots)$

ここで

$$\left.\begin{aligned} &a_{rs} = -p^2 b_{rs} + K_{rs} \\ &b_{rs} = \int_0^L \rho S X_r X_s dz \\ &K_{rs} = \int_0^L E S X'_r X'_s dz \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (5)$$

p：角振動数

3．2　横振動

ω：横波の角振動数

γ：横波の伝播定数

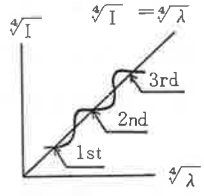

図5

とすれば，横波の位相速度曲線は図2のようである。従って

$$\gamma^2 R = \text{const.} \quad \cdots\cdots (6)$$

＊八戸工業大学土木工学科