八戸工業大学紀要　第 38 巻（2019） pp. 69-87

機械系科目「材料力学」の予習・復習問題作成のための例題集

鈴木 寛†

Exercise Collection for Constructing Homework Problems of “Mechanics of Materials”

Hiroshi SUZUKI†

ABSTRACT

In this report, 230 problems for teachers who lecture "Mechanics of Materials" in universities are presented. The problems are made based on problems in various qualification tests set in past. The level of the problems is similar to those in the various qualification tests, and these problems cover the range of first-step professional engineer examination and professional mechanical design engineer examination etc. Moreover, problems to decide the size and to choose materials, problems about material strength, and Mises stress which are scarcely given in the various qualification tests or are few lectured in "Mechanics of Materials", but needed in the practical business, are also presented. Please utilize the presented problems for constructing problems for preparation and review, group work and active learning.

Key Words: *Mechanics of Materials, First-Step Professional Engineer Examination, Professional Mechanical Design Engineer Examination, Preparation and Review, Group Work, Active Learning*

キーワード：材料力学，技術士1次試験，機械設計技術者試験，予習・復習，グループワーク，アクティブラーニング

1. はじめに

大学の機械系学科所属の学生が学ぶ科目「材料力学」は，大学卒業後に利用する機会が多い科目である．たとえば，経済産業省による産業界のニーズの実態に係る調査結果 [1)]によれば，設計工学(人間工学も含む)，機構学・機械要素(歯車等)，機械材料の 3 分野とともに，材料力学(構造，破壊など)は企業における業務で重要な専門分野であるとされている．また，文献 2)の調査によれば「材料力学」は機械系分野の出身者にとって卒業後に役に立っている大学で学んだ科目の 1 位に，文献 3)の調査によれば材料系分野の出身者にとってもっと勉強しておけば良かったと思う専門科目の 2 位に位置している．

当然，「材料力学」は機械工学全般の知識を問う資格試験の出題分野の一つの柱となっている．このような試験の代表として，機械設計技

平成 30 年 12 月 10 日受付

† 工学部機械工学科・教授

術者試験(2 級，3 級)と技術士 1 次試験が上げられる．この中の機械設計技術者試験における「材料力学」では，狭義の材料力学からの出題が中心で，設計の実務に即し，かつ数値を選択する問題が多い[4]．

これに対して，技術士 1 次試験では，専門科目(機械部門)のみならず，受験者全員を対象とする基礎科目においても材料力学関連問題が出題される[5]．基礎科目においては，広義の材料力学に関する問題が毎年 3〜5 問程度出題される．基礎科目は五つの群からなっており，設計・計画に関するもの(応力ーひすみ曲線，安全率等)，解析に関するもの(有限要素法，引張り，曲げ，3 次元の応力状態等)，材料・化学・バイオに関するもの(応力ーひすみ曲線，材料強度，腐食)において材料力学に関する問題が出題されている．

専門科目(機械部門)の中では，平成 23 年度から 29 年度までの 7 年間，専門科目での出題 35 問中で材料力学の問題が 10 問出題されている[5]．この問題数の多さからも機械工学分野における材料力学の重要さが理解できる．また，引張り・圧縮，曲げ，ねじりの荷重条件の問題に加え，座屈，2 次元応力状態，初歩的な材料強度に関する問題も度々出題される．

技術士を目指すとき，JABEE 認定プログラム修了者はこの技術士 1 次試験の受験が免除される．実際，ここ数年で機械及び関連の工学分野での認定を受けた[6]，東京都市大学機械工学科，大分大学機械コース，横浜国立大学機械工学教育プログラム，九州工業大学機械工学・宇宙工学コース，知能制御工学コースのシラバスを確認すると，技術士 1 次試験専門科目(機械部門)で出題される材料力学の問題を概ねカバーしていることがわかる．

基礎科目を含め，技術士 1 次試験においては材料強度および有限要素法に関する問題が出題されることがある．これらは，機械系分野の教育プログラムを卒業後に必要となる知識でもある．横浜国立大学機械工学教育プログラムのように，それらを教授する「材料強度学」や「有限要素法入門」といった科目をカリキュラム上に配置するまではいかずとも，講義の中でこれら事項について触れる必要はあろう．また，受講生の多くには，将来，汎用有限要素法プロフラムで計算された結果の解釈が要求される．そのために，3 次元の構成方程式や，相当応力の知識が必要であるが，技術士 1 次試験においてもこれらに関する出題がなされている．

この報告では，様々な資格試験の問題などを参考に材料力学に関する 230 の問題を作成した．これを，JSEM テキストシリーズ「材料力学」[7]の章立てを参考に，「(A) 応力とひずみ」(28)，「(B) 引張りと圧縮」(36)，「(C) 軸のねじり」(26)，「(D) はりの曲げ」(64)，「(E) はりの複雑な問題」(8)，「(F) 柱の座屈」(11)，「(G) 複雑な応力」(39)，「(H) エネルギー法」(4)，「(I) 骨組構造とシミュレーション」(3)，「(J) 強度と設計」(10)に分類し，さらに「(K) 材料力学に関連する材料定数」(1)を加えた．ここで，カッコ内の数字は提示した問題数である．

以下に掲載の問題は，そのままでは受講生に提示できない．少なくとも，記号の設定，数値の決定，さらに，説明のための図の作成が必要である．逆に，以下に示した問題を受講生にそのまま提示し，受講生が上記事項を付け加え，完成した問題に回答するといった使い方もできる．これをアクティブラーニングやグループワークで実施できれば，大きな教育効果が期待できる．

一般に「材料力学」では応力や変形量を算出する正順ともいえる問題の出題が多い．しかし，設計にあたっては，寸法の決定，あるいは負荷可能な荷重の算定といった逆順ともいえる問題を取り扱う場合も多い．このような事項に対応するために，作問にあたって逆順ともいえる問題を組み入れた．

2. 各分類における問題

(A)　応力とひずみ

(A-1)　引張・圧縮応力の定義に基づいた計算

◆ 1)　断面積が与えられている，あるいは断面

寸法を算出して断面積を求め，応力の定義に基づいて引張応力の値を算出する．

◆ 2)　断面積と応力から加わっている荷重の値を算出する．

◆ 3)　板の厚さと引張強度，深絞り用パンチの直径が与えられる．安全率がある値のときのプレス機の容量の値を求める．

定義に基づいて応力や荷重を求める問題を示した．定義に基づいた断面の寸法の決定については(A-6)に記した．

(A-2)　ひずみの定義やフックの法則に基づいた計算

◆ 4)　長さと伸び・縮みが与えられ，ひずみを算出する．

◆ 5)　ひずみと伸びが与えられ，ひづみの定義に基づいて，棒の元の長さを求める．

◆ 6)　ひずみと縦弾性係数を与えられ，応力を求める．

◆ 7)　応力とひずみが与えられ，縦弾性係数を求める．これは「(A-5) 応力-ひずみ曲線」の分類の中で出題しやすい．

◆ 8)　長さと素材の縦弾性係数がわかっている棒に引張応力が作用するときの棒の伸びの値を求める．

最後の問題は，「(B)引張りと圧縮，(B-1) $\delta = Pl/EA$ を使って解く」に分類した問題に似ている．

(A-3)　様々なせん断荷重負荷に関する問題

◆ 9)　せん断荷重を加えて生じる変形量を計測する．定義からせん断応力およびせん断ひずみを求める．その結果からせん断弾性係数を算出する．

◆ 10) フックの法則を利用し，せん断応力からせん断ひずみの値を求める．

◆ 11) 2 枚の厚さが等しい剛体板が接着剤で接合されている．接着部の厚さは一定である．接着した板それぞれに反対方向に引張荷重を加える．接着部のせん断弾性係数が与えられ，荷重を加えたときの剛体板のずれを求める．

◆ 12) 2 枚の板を重ねリベットで接合する．板それぞれに反対方向に引張荷重を加えるとき，リベットの断面に生じる平均せん断応力を求める．リベットが，二つ，あるいは三つで板を接合する問題もある．

◆ 13) 2 枚の厚さの等しい長方形板がある．幅中央に穴をあけ，リベットで接合する．板それぞれに反対方向に引張荷重を加えるとき，① リベットがせん断により破断する，② リベット穴縁よりせん断により荷重と平行に二つのき裂が進展する，③ 板がリベット穴縁から荷重と垂直方向に破断する可能性がある．①，②の平均せん断応力と，③の平均引張応力を求める．

◆ 14) ピン継手に使用されるピンの直径の値を決定したい．荷重および許容せん断応力は与えられている．

◆ 15) せん断強度がわかっている板を，円形断面を持つパンチで打ち抜く．打ち抜き時の荷重の値を見積もる．

◆ 16) ある回転数で動力を伝達する軸に平行キーが取り付けてある．キーに生じる平均せん断応力と圧縮応力の値を求める．

定義に基づいたせん断応力，せん断ひずみ，せん断弾性係数の算出から始めて，一般的なせん断荷重の負荷形態の問題を配置した．

(A-4)　荷重と垂直方向の変形，ポアソン比など

◆ 17) 素材の縦弾性係数とポアソン比がわかっている部材に引張応力，または引張荷重を作用させる．応力(荷重)と垂直方向のひずみまたは収縮量(寸法)を求める．

◆ 18) 棒を軸方向に引張ったときの軸方向のひずみと軸方向と垂直方向のひずみからポアソン比を求める．これも「(A-5) 応力-ひずみ曲線」の中で出題できる．

◆ 19) 縦弾性係数，ポアソン比が与えられ，せん断弾性係数の値を求める．

「(G)複雑な応力，(G-8)ポアソン比の範囲と体積変化」や「(G-9)応力－ひずみ関係式，ひずみ－変位関係式」にもポアソン比を扱った問題がある．

(A-5)　応力-ひずみ曲線

◆ 20) 軟鋼の応力-ひずみ曲線の，比例限，弾性限，上降伏点，下降伏点，引張強度，破断点を答える問題．

◆ 21) アルミニウム合金の応力-ひずみ曲線における 0.2%耐力を算出する問題.

「(A-2) ひずみの定義やフックの法則に基づいた計算」や「(A-4) 荷重と垂直方向の変形，ポアソン比など」で述べたように，応力ーひずみ曲線から縦弾性係数やポアソン比を算出する問題もありうる.

(A-6)　断面寸法の決定

◆ 22) ある大きさの荷重を正方形断面を持つ棒で支えたい．引張強度と安全率，あるいは加わっている応力が与えられる．正方形断面の一辺の長さの値を求める．この問題は，断面が円形などのバリエーションを持つ.

◆ 23) アイボルトの許容引張強度とこのアイボルトが耐える荷重が与えられる．ボルトの谷径を求める.

◆ 24) 円形断面を持つロープの許容応力，あるいは引張強度と安全率が与えられる．ある荷重を支えるのに必要なロープの直径を求めるための式を示す.

◆ 25) いくつかの材料の許容引張応力，密度，単位質量あたりの価格が与えられる．ある設計荷重に耐える断面寸法を算出し，部材の質量や価格を判断基準にして，使用する材料を決定する.

この問題は強度を基準にした材料選択の問題である.

◆ 26) 内径がわかったパイプの先端にフランジが付いている．このフランジに鏡板を取り付けてパイプの穴をふさぐ．鏡板はフランジにボルトで固定する．ボルトの有効径と許容応力は与えられる．パイプにある大きさの内圧が作用するとき，これを支えるために必要なボルトの本数を決定する.

この問題は，ボルトの本数を与え，ボルトの有効径を決定するというバリエーションを持つ.

荷重を支えるのに必要なボルトの有効径やワイヤの直径を求める問題では，市販のボルトやワイヤの中から荷重を支えるのに適切な寸法のものを選択してもらう方が，実際的であろう.

(A-7)　安全率，基準強さ，使用強さ

◆ 27) ① 安全率の定義と負荷応力の最大値，② 切欠き係数と応力集中係数の大小関係，③ 繰り返し負荷時などにおける基準強さの選択，④ 動的負荷と静的負荷における安全率の違い，⑤ 変形量を基準にした設計に関する選択問題.

◆ 28) ① 玉掛けに用いるワイヤロープ，② エレベータのかごを昇降させるためのロープ，③ ロケットの構造設計，④ 人が摂取する薬品を安全率の低い順に並べる.

(B)　引張りと圧縮

(B-1)　$\delta = Pl/EA$ を使って解く(1 本の棒のとき)

◆ 1)　棒の長さ，断面積または断面寸法，素材の縦弾性係数，引張荷重が与えられたとき，棒の伸びの値を求める.

◆ 2)　パイプを垂直に立てて上端に重りを乗せたときのパイプの縮み量の値を算出する.

◆ 3)　棒の長さ，断面積，加えた荷重と伸びが与えられたとき，棒の素材の縦弾性係数の値を求める.

◆ 4)　棒の長さ，断面積，伸び，棒の素材の縦弾性係数が与えられたとき，加えた荷重の大きさを求める.

見出しに書いた式 $\delta = Pl/EA$ は公式とは認識されないが，断面形状が一定の 1 本の棒のみならず，「(B-2) 段付き棒の伸び，自重なし」の問題など適用範囲が広い.

(B-2)　段付き棒の伸び，自重なし

◆ 5)　円形断面を持つ段付き棒に引張荷重が作用する．段付き棒の全体の伸びを求める．自重の影響は考慮しない．式または値を答える.

◆ 6)　円形断面を持つ段付き棒に引張荷重が作用する．直径が大きい部分の直径と棒全体の伸びが与えられる．直径が小さい部分の直径の値を求める.

◆ 7)　断面積，長さ，材質が異なる棒を直列に置いて両端に圧縮荷重を加える．全体の縮み量を求める.

◆ 8)　片端を固定した円錐台形棒に引張荷重が作用する．棒の素材の縦弾性係数が与えられ，棒全体の伸びを求める.

ここでの問題の解法は，「(B-11) 直列に配置した棒に生じる熱応力など」の問題を解くにあたり利用される．

「(H) エネルギー法，(H-1) 一軸引張荷重下の棒に蓄えられるひずみエネルギー」でも段付き棒の伸びを求める必要がある．

(B-3)　自重を考慮した応力の算出，最長長さ，全体の伸び，応力一定のときの断面寸法

◆ 9)　台形の板の下底を天井に貼り付けてつるす．物体力を考慮して，下底(上側)の面に作用する平均応力を求める．式で表す．

◆ 10) 丸棒の素材の密度と引張強度が与えられる．物体力を考慮して鉛直につるした棒が破断するときの長さを求める．式で表す．

◆ 11) 水平な剛体板上に置かれた厚さが定められた正方形のコンクリート板で圧縮荷重を支える．コンクリート板の自重も考慮する．剛体板と接する位置でコンクリート板内に生じる圧縮応力がコンクリートの許容応力に等しいとき，正方形の一辺の長さを求める．

◆ 12) 円形断面を持つ棒の一端が天井に固定されてつるされている．棒の素材の縦弾性係数と密度が与えられる．自重を考慮して棒全体の伸びを求める．

◆ 13) 段付き棒の上端が固定されてつるされている．自重による段付き棒の伸びを求める．式で表す．

◆ 14) 自重が作用する物体の上端を固定し下端に下向きの荷重を加える．この物体の水平断面は円形で，断面に作用する応力を一定にするという条件が付けられている．水平断面の半径を下端からの距離の関数で表す．

自重を考慮して棒全体の伸びを求めるとき，棒の微小区間の伸びを合計して棒全体の伸びを求める．これが微小区間を考える最初の問題となろう．

(B-4)　トラスと力の分解

◆ 15) 3 本の棒をピン接合し二つの角が 45°の直角三角形を形成している．1 番長い棒の両端を単純支持し，直角三角形を立てる．支持していないピン接合部分に下向きの荷重を加えるとき，それぞれの棒に作用する荷重を式で表す．

◆ 16) 長さが等しい 2 本の棒のそれぞれ一端が剛体の天井にピン接合され，さらに棒の他端どうしがピン接合されて，単純なトラスを形成している．棒どうしをピン接合した部分に下向きの荷重が作用する．荷重点の変位の値を求める．

◆ 17) 長さが異なる 2 本の棒のそれぞれ一端が剛体の天井にピン接合され，さらに棒の他端どうしがピン接合されて，単純なトラスを形成している．棒どうしをピン接合した部分に下向きの荷重が作用する．棒の伸びの比を式で表す．さらに，荷重点の鉛直方向と水平方向の変位の値を求める．

◆ 18) 長さが異なる 2 本の棒のそれぞれ一端が平らな剛体の天井にピン接合され，さらに棒の他端どうしがピン接合されている．2 本の棒は角度 30°をなし，1 本の棒は天井と 90°の角度をなす．棒どうしをピン接合した部分に天井と平行な荷重が作用する．荷重点の変位量を求める．

力の分解，各棒の伸び，荷重点の変位の順に配置した．

トラスの問題は，「(I) 骨組構造とシミュレーション，(I-1) トラスの不静定問題」にも存在する．

(B-5)　並列，変形後の長さや伸び・縮みが等しいなど

◆ 19) 長さが等しく材質が異なる丸棒と円筒の中心軸を一致させ，それぞれの両端を剛体板で連結する．剛体板に引張荷重を加えるとき，丸棒に生じる応力を求める．式で表す．

◆ 20) 三つの層を積み重ね，層間を接着したサンドイッチ板がある．外側の二つの層は材質が同じで，厚さが等しい．このサンドイッチ板の巨視的な縦弾性係数の値を求める．

◆ 21) 長さ，断面積，材質が同じ 2 本の棒と，長さはわずかに短く，断面積，材質も異なる 1 本の棒がある．材質が同じ 2 本の棒を外側に配置して 3 本の棒を並べ，外力を加えて棒の長さを等しくして剛体板で連結し，外力を取り除く．外力を取り除いた状態での中央の棒の長さを求める．式で表す．

この問題での長さの差を，一条ねじのピッチ

と回転数の積で与える場合もある．

この問題の解法は，「(B-12) 並列に配置された棒と円筒に生じる熱応力」に示した問題の解法などに利用される．

◆ 22) 長さや断面積が異なる複数の棒がある．これらの棒を立てたとき，棒の上端の高さを同一にする剛体の床の上に棒を立て，棒の上端の上に剛体板を乗せる．剛体板に下向きの集中荷重を加える．剛体板が水平を保つときの荷重の作用点の位置を求める．式で表す．棒は 2 本のときと 3 本のときがある．3 本の棒は直線状に配置される．

◆ 23) 棒の一端を回転自由とし，反対側の端との間 2 ヶ所でワイヤを連結し，剛体天井から 2 本のワイヤを鉛直につるすようにして，棒を水平に保つ．棒の先端に下向きの荷重を加えるときの片方のワイヤの伸びを求める．式で表す．

長さが等しい棒を同時に引張る問題から初めて，棒の長さが異なるときの残留応力，長さや断面積が異なる棒を同時に圧縮し水平を保つ問題の順に配置した．

(B-6)　棒または段付き棒の両端を固定し，両端の間で軸方向に荷重が作用する

◆ 24) 棒の両端を剛体壁で固定し，固定端の間で軸方向に荷重が作用する．荷重点の変位や，壁に作用する力を式で表す．段付き棒の段の部分に荷重を加えたときの荷重点の変位の値を求める問題もある．

(B-7)　境界条件の違いにより熱応力が発生するか否かを答える

◆ 25) 次の 4 種類の棒がある．① 直線状の棒の両端を固定，② 直線状の棒の両端を長さ方向にスライド可能な単純支持，③ 直線状の棒の一端を固定し他端は長さ方向にスライド可能，④ L 形状棒の一端を固定し他端を固定端から延びる部分と平行な方向にスライド可能な単純支持．棒の温度が上昇するとき熱応力が発生する棒を選択する．

(B-8)　温度上昇による寸法変化

◆ 26) 温度上昇後，平面上に置いたレールの長さの値を求める．

◆ 27) 長方形板がある．拘束がないとき，温度上昇後の面積増加量の値を求める．

◆ 28) 中央に円形状の穴(円孔)の開いた正方形板がある．温度上昇後の穴の直径の値を求める．

◆ 29) 厚肉円筒の外側に薄いリングを焼きばめで取り付ける．焼きばめするために必要な上昇温度と，焼きばめ後にリングに作用する周方向応力の値を求める．

温度上昇後に穴の直径が減少しないことに注意する．

(B-9)　両端が剛体壁に固定された棒に生じる熱応力

◆ 30) 両端を固定した丸棒がある．棒の素材の縦弾性係数と線膨張係数が与えられる．温度が上昇するとき，棒に生じる熱応力の値，または荷重の値を求める．

◆ 31) 両端を固定した棒の温度を上昇させる．棒の素材の縦弾性係数と線膨張係数が与えられる．棒に作用する熱応力が棒の許容応力となるときの上昇温度を式で表す．

「(F) 柱の座屈，(F-3) 上昇温度」のように，座屈に至るまでの上昇温度を求める問題も存在する．

(B-10) 接触するまでの温度上昇

◆ 32) 棒の片端を固定し，もう一つの端は剛体壁との間に隙間を持つ．棒が剛体壁に接触するまでの上昇温度，および接触後の熱応力を求める．式で答える問題や値で解答する問題がある．

(B-11) 直列に配置した棒に生じる熱応力など

◆ 33) 両端を固定した段付き棒がある．温度が上昇するとき段付き棒に生じる熱応力を求める．

◆ 34) 縦に連結した線膨張係数，縦弾性係数，長さが異なる 2 本の棒の温度が上昇する．棒に生じる熱応力を求める．断面積が同一の場合や，断面積が異なる場合がある．式で答える．

◆ 35) 棒とばねを縦に連結する．棒の温度が上昇するとき，棒に作用する力の値を求める．

直列に配置した棒に生じる熱応力の問題の解法は，「(B-2) 段付き棒の伸び，自重なし」の問題の解法に似ている．

(B-12) 並列に配置された棒と円筒に生じる熱応力

◆ 36) 長さが等しい円柱と円筒の中心軸を一致させ両端を剛体板で固定する．円柱と円筒の温度が上昇するとき，円柱に生じる熱応力を求める．式で表す．

この問題は，「(B-5) 並列，変形後の長さや伸び・縮みが等しいなど」の中の問題と解法が同じである．

(C)　軸のねじり

(C-1)　ねじりモーメントが作用する丸棒の断面に生じる最大せん断応力とねじれ角

◆ 1)　ねじりモーメントが作用する丸棒の断面に生じる最大せん断応力とねじれ角の値を求める．

◆ 2)　段付き棒の片端が固定され，もう一つの端にねじりモーメントが作用する．棒全体のねじれ角を求める．

◆ 3)　円錐台の片端が固定され，もう一つの端にねじりモーメントが作用する．円錐台全体のねじれ角を求める．

◆ 4)丸棒の片端が固定され，もう一つの端と，端と端の間の計 2 か所にねじりモーメントが作用する．各区間のねじれ角，および棒全体のねじれ角を求める．

「(C-6) ねじりの不静定問題」の準備の問題である．

◆ 5)　一端を固定した丸軸がある．軸に生じる最大せん断応力の上限を設定したとき，加えることのできる最大ねじりモーメントを求める．

◆ 6)　許容せん断応力が与えられる素材でねじりモーメントを支える丸棒を作製する．丸棒の直径を決定する．

◆ 7)　ねじりモーメントを支える丸棒を作製する．素材のせん断弾性係数は与えられる．単位長さあたりのねじれ角をある値に以下にするときの丸棒の直径を決定する．

◆ 8)　ある材料でできた丸棒を，ねじりモーメントを支える部材として使用している．軽量化のためにこの部材の素材を別の材料に変更したい．材料変更後の部材の直径を求める．

以上のように丸棒のねじりに関する問題は様々存在するが，資格取得試験での出題は少ないようである．

(C-2)　丸棒のねじれ角から棒に作用するねじりモーメントの値を見積もる

◆ 9)　丸棒のねじれ角から作用するねじりモーメントの値を見積もる．

◆ 10) 丸棒に作用するねじりモーメントと生じるねじれ角から棒の素材のせん断弾性係数を求める．

(C-3)　丸棒の直径と最大せん断応力の関係

◆ 11) 同一の材料で作られた直径が異なる二つの丸棒がある．一つの丸棒の直径に比べ，もう一つの丸棒の直径は n 倍大きい．直径が n 倍に増加すると支えることのできるねじりモーメントは何倍になるかを見積もる．

(C-4)　丸棒の直径，長さ，せん断弾性係数とねじれ角の関係

◆ 12) 同一の材料で作られた長さが等しく直径が異なる二つの丸棒がある．二つの丸棒に同一の大きさのねじりモーメントが作用する．棒に生じるねじれ角の比を求める．

◆ 13) 素材が同じで，長さと直径が異なる二つの丸棒がある．ねじれ角を等しくするねじりモーメントの比を求める．

◆ 14) 素材の異なる二つの丸棒に同一の大きさのねじりモーメントが作用する．二つの丸棒で単位長さあたりのねじれ角を等しくしたい．丸棒の直径の比を求める．

(C-5) 円筒のねじり

◆ 15) 円筒の外径，厚さ，長さ，素材の縦弾性係数およびポアソン比が与えられている．この円筒の片端を固定し，反対側の端にねじりモーメントを加えたときのねじれ角の値を求める．

◆ 16) 一端を固定した円筒の外半径，内半径，長さ，および素材のせん断弾性係数が与えられている．軸のねじれ角がある値のとき，軸に作用するねじりモーメントの値を求める．

◆ 17) 一端を固定した円筒の外半径，内半径が与えられている．軸に生じる最大せん断応力の上限を設定したとき，加えることのできる最大ねじりモーメントの値を求める．

◆ 18) 同一の材料で作られた中実丸棒と中空丸棒がある．中実丸棒の直径と中空丸棒の外径が等しい．伝達できるねじりモーメントの比を求める．

中実丸棒と中空丸棒の伝達できるねじりモーメントの比の問題は，軽量化の観点から重要であろう．

(C-6)　ねじりの不静定問題

◆ 19) 丸棒の両端を固定し，両端の間にねじりモーメントを加えたとき，棒の固定端から荷重点の間に生じるねじれ角を式で表す．

◆ 20) 段付き棒の両端を固定し，段の所にねじりモーメントを加える．固定端のところで生じるねじりモーメントを式で表す．

◆ 21) 直径が等しく材質が異なる丸棒を接合して 1 本の棒にする．この棒の両端を固定して，接合部にねじりモーメントを加える．固定端のところに生じるねじりモーメントを式で表す．

◆ 22) 1 本の軸に 3 枚の歯車が取り付けられている．一番左側に取り付けた歯車からトルクが入力され，中央と一番右側に取り付けた歯車に分配される．中央と一番右側の歯車の間の軸(軸径既知)に生じる最大せん断応力を求め，これと同じ最大せん断応力が生じるように左側と中央の歯車の間の軸の直径の値を決める．

(C-7)　軸径の決定と伝達動力の算出

◆ 23) 回転軸の出力，回転数，軸径が与えられる．回転軸に生じる最大せん断応力の値を求める．

◆ 24) 回転軸の軸径，回転数，許容せん断応力が与えられる．この軸の最大伝達動力の値を求める．

◆ 25) 出力，回転数，軸の素材のせん断弾性係数が与えられている．単位長さあたりのねじれ角がある値を満足するための軸径を求める．

最後の問題は，許容せん断応力の値が与えられ，軸径を求めるというバリエーションを持つ．

(C-8)　軸継手

◆ 26) 二つの丸軸がフランジ形継手で連結されて，トルクを伝達する．ボルトの有効径，許容せん断応力，ボルト穴ピッチ円直径，伝達トルクが与えられたとき，必要なボルトの本数を求める．

この問題は，ボルトの有効径を求める，あるいは，伝達できるトルクを求めるといったバリエーションを持つ．

(D)　はりの曲げ

(D-1)　片持ちばりに，集中荷重，分布荷重，その組み合わせが作用するときのせん断力と曲げモーメント

◆ 1)　片持ちばりの固定端と先端の間，および先端の 2 か所に集中荷重が作用する．せん断力図と曲げモーメント図を描く．

◆ 2)　片持ちばりの全長に等分布荷重が作用する．せん断力図と曲げモーメント図を描く．

◆ 3)　片持ちばりの先端からある位置まで等分布荷重が作用する．せん断力図と曲げモーメント図を描く．

◆ 4)　片持ちばりに，固定端から線形に減少して先端で 0 になる分布荷重が作用する．せん断力図と曲げモーメント図を描く．

◆ 5)　片持ちばりの先端にモーメントが作用する．曲げモーメント図を描く．

◆ 6)　等分布荷重が全長にわたって下向きに作用する片持ちばりに，さらに先端に等分布荷重の合力と等しい大きさの集中荷重が上向きに作用する．このときのせん断力図と曲げモーメント図を描く．

◆ 7)　片持ちばり先端に斜めに集中荷重が作用する．はりの自重も考慮して，はりに作用する最大せん断力，および最大曲げモーメントを求める．

片持ちばりでは，固定端で曲げモーメントが最大の場合が多いこともあり，固定端での最大曲げ応力を求める問題も多い．

(D-2)　片持ちばりに集中荷重，または等分布荷重が作用するときの最大曲げ応力

◆ 8)　長方形断面を持つ片持ちばり先端に集中荷重が作用する．固定端に生じる最大曲げ応力の値を求める．

◆ 9)　長方形断面を持つ片持ちばり全長にわた

って等分布荷重が作用する．固定端に生じる最大曲げ応力の値を求める．

◆ 10) 断面形状と長さが等しい二つの片持ちばりがある．一つの片持ちばりには先端に集中荷重が作用し，もう一つの片持ちばりにはこれと合力が等しい等分布荷重がはりの全長に作用する．固定端での最大曲げ応力の比を求める．

固定端に作用する曲げモーメントを断面係数で割って最大曲げ応力が求まる．曲げモーメントの算出・誘導とセットになった問題が多い．

(D-3)　片持ちばりに集中荷重，等分布荷重，三形状分布荷重，またはその組み合わせが作用するときの最大曲げ応力の大きさの比較

◆ 11) 断面形状と長さが等しい 5 本の片持ちばりがある．5 本のはりには集中荷重，等分布荷重，集中荷重と等分布荷重の組み合わせが作用し，荷重の合力は等しい．集中荷重単独のときには，荷重ははりの先端に作用する．等分布荷重のみのときにははりの全長，または先端から半長に作用する．集中荷重と等分布荷重の組み合わせのときは，合力の半分の集中荷重が先端に作用し，先端から半長，または固定端から半長に等分布荷重が作用する．以上のはりを，はりの固定端に生じる最大曲げ応力が大きい順に並べる．

◆ 12) 断面形状と長さが等しい 5 本の片持ちばりがある．片持ちばりには，集中荷重，等分布荷重，三角形状分布荷重が作用する．作用する荷重の合力は等しい．集中荷重ははりの先端に作用する．等分布荷重ははりの全長，または先端から半長，または固定端から半長に作用する．三角形状分布荷重は先端から線形に減少し，固定端で 0 になる．以上のはりを，はりの固定端に生じる最大曲げ応力が大きい順に並べる．

以上は，分布荷重を集中荷重に置き換え，固定端からその集中荷重までの距離を比較して，固定端に生じる最大曲げモーメントの順位付けを行う問題ともいえる．

(D-4)　両端支持ばりに作用する曲げモーメント

◆ 13) 両端支持ばりの中央より左側に一つの集中荷重が作用する．はり中央での曲げモーメントを求める．式で表す．

◆ 14) 両端支持ばりに二つの集中荷重が作用するときのせん断力の最大値，および曲げモーメントの最大値を求める．

◆ 15) 両端支持ばり全長に等分布荷重が作用する．はりに生じる最大曲げモーメントを式で表す．

◆ 16) 両端支持ばりに，一方の端から直線的に減少し，もう一方の端で大きさが 0 になる三角形状分布荷重が作用する．ある点での曲げモーメントの値を求める，あるいは最大曲げモーメントを式で表す．

◆ 17) 両端支持ばりに等分布荷重と集中荷重が作用する．等分布荷重が作用する範囲ははりの片方の支点からはりの長さの 1/3 の位置までで，集中荷重が作用する位置ははり中央である．等分布荷重の合力は集中荷重の 6 倍の大きさを持つ．曲げモーメントが最大になる位置と，そこでの曲げモーメントの値を求める．

◆ 18) 両端支持ばりの支点間の 1 点にモーメントが作用する．各支点での反力を求め，曲げモーメント図を描く．

◆ 19) 両端支持ばりの片方の支点の所にモーメントが作用する．各支点での反力を求め，曲げモーメント図を描く．

◆ 20) 両端支持ばりの両方の支点の所で大きさが等しく向きが反対のモーメントが作用する．曲げモーメント図を描く．

集中荷重(一つおよび二つ)，分布荷重(等分布，三角形状分布)，集中荷重と等分布荷重の組み合わせ，モーメント(支点間，片端，両端)が作用の順に問題を配置した．

(D-5)　両端支持ばりに生じる最大曲げ応力

◆ 21) 長方形断面を持つ両端支持ばりに一つの集中荷重が作用する．はりのある位置での最大曲げ応力の値を求める．

◆ 22) 両端支持ばりに二つの集中荷重が作用するとき，曲げモーメント最大の位置での最大曲げ応力の値を求める．

◆ 23) 四点曲げ下での最大曲げ応力を求める．円形断面を持つはりでは最大曲げ応力の値を求

める．正方形断面を持つはりでは最大曲げ応力を式で表す.

◆ 24) 両端支持ばりの全長に等分布荷重が作用する．はりの断面は正方形である．最大曲げモーメントが生じる位置での最大曲げ応力を式で表す.

◆ 25) 部分的に等分布荷重が作用する両端支持ばりがある．等分布荷重が作用する領域の二つの端は，はりの二つの端からそれぞれ等距離にある．はりの断面は長方形である．曲げモーメント最大の位置での最大曲げ応力の値を求める.

◆ 26) 円形断面を持つ両端支持ばりの片方の支点から中央の位置まで等分布荷重が下向きに作用し，はり中央で集中荷重が上向きに作用する．はり中央での最大曲げ応力の値を求める.

◆ 27) 二つの両端支持ばりがある．一つのはりには中央に集中荷重が，もう一つのはりには集中荷重と合力が等しい等分布荷重が全長に作用する．曲げモーメントが最大の位置での最大曲げ応力の比を求める.

◆ 28) 二つの両端支持ばりがある．一つのはりには中央に集中荷重が，もう一つのはりには等分布荷重が全長に作用する．曲げモーメントが最大の位置での最大曲げ応力が等しいとき，集中荷重と等分布荷重の関係式を求める.

◆ 29) 両端支持ばりの中央に集中荷重が作用するはりを丸棒で作りたい．はりの長さ，荷重の大きさ，許容応力が与えられる．丸棒の直径の値を求める.

最後ははりの断面寸法を決定する問題である．この問題で断面形状は円形であるが，正方形，あるいは縦横比を固定した長方形として，寸法を決定する問題もある.

(D-6)　棒の両端の間に支点があるはりに生じる最大曲げモーメント，最大曲げ応力

◆ 30) 棒の二つの端から等距離の 2 点を単純支持する．棒の全長で等分布荷重が作用する．せん断力図，曲げモーメント図を描く.

◆ 31) 長方形断面を持つ棒の二つの端から等距離の 2 点を単純支持する．支点の間には等分布荷重が，はりの二つ先端には等しい大きさの集中荷重が作用する．せん断力図，曲げモーメント図を描き，曲げモーメントが最大の位置での最大曲げ応力の値を算出する.

◆ 32) 棒の片端を単純支持し，さらにもう一つ端との間も単純支持する．支点の間には等分布荷重が，はりの先端には集中荷重が作用する．せん断力図，曲げモーメント図を描き，最大曲げモーメントの値を求める.

◆ 33) 丸棒の片端を単純支持し，さらにもう一つ端との間も単純支持する．支点の間のある位置と，はりの先端に集中荷重が作用する．曲げモーメント図を描き，曲げモーメント最大の位置での最大曲げ応力の値を算出する.

ここに上げた問題は単純支持点が二つで，両端支持ばり同様な手法で問題を解くことができる.

(D-7)　両端支持ばりと片持ちばりの比較

◆ 34) 断面形状，長さが等しい両端支持ばりと片持ちばりがある．両端支持ばりにははり中央に，片持ちばりにははりの先端に等しい大きさの集中荷重が作用する．曲げモーメント最大の位置での最大曲げ応力の比を求める.

◆ 35) 断面形状，長さが等しい両端支持ばりと片持ちばりがある．ともに全長に等分布荷重が作用する．曲げモーメント最大の位置での最大曲げ応力の比を求める.

以上の問題は，両端支持ばりは片持ちばりに比べ，より大きな荷重を支えることができることを受講生に理解させるための問題である.

(D-8)　断面寸法が最大曲げ応力に与える影響

◆ 36) 直径が異なる中実丸棒に同じ大きさの曲げモーメントが作用する．生じる最大曲げ応力の比を求める.

◆ 37) 長方形断面を持ち，長さが等しい 2 本の片持ちばり先端に等しい大きさの集中荷重を加える．断面で，片方のはりの高さがもう片方のはりの高さ 2 倍で，幅が 1/2 倍のとき，はりの固定端に生じる最大曲げ応力の比を求める.

◆ 38) 円形断面を持つはりと長方形断面(高さが幅の 3 倍)を持つはりがある．はりの断面積は等しい．これらのはりに同一の曲げモーメントが

作用するとき，はりに生じる最大曲げ応力の比を求める．

以上の問題は，寸法が異なる円形断面や長方形断面を持つはりで最大曲げ応力の比を計算し，断面寸法が最大曲げ応力に与える影響を受講生に理解させるための問題である．

(D-9)　断面形状と断面係数，最大曲げ応力

◆ 39) 丸棒から長方形断面の棒を削り出す．断面係数が最大となる長方形の縦横比を求める．

◆ 40) 長方形から対角線が等しい長方形を抜いた断面を持つはりがある．このはりの断面係数を求める．

◆ 41) 正方形からこれと中心が等しい円形を抜いた断面を持つはりがある．このはりの断面係数および断面二次モーメントを求める．

◆ 42) H 形断面を持つはりを工の形に置いて，曲げモーメントを加える．このはりの断面係数を求める．

◆ 43) T 形断面を持つはりを T の形に置いて，曲げモーメントを加える．はりに生じる最大曲げ応力(引張応力)と最小曲げ応力(圧縮応力)を求める．

◆ 44) 二等辺三角形断面を持つ両端支持ばりがある．三角形の底辺を下にして，全長に下向きの等分布荷重が作用する．曲げモーメント最大の位置での最大曲げ応力の値を求める．

長方形に続いて，不正確な表現であるが，断面形状が，ロ形，◎形，エ形，T 形，△形の順に問題を配置した．

(D-10)　片持ちばりを用いた荷重の測定

◆ 45) 片持ちばりの固定端からある距離離れた上面にひずみゲージを貼り付ける．貼り付けられたひずみゲージははりの長さ方向のひずみの値を与える．はりの素材の縦弾性係数は与えられる．測定されるひずみの値からはりの先端に加える荷重の値を求める．はりは，長方形断面を持つ場合や，円形断面を持つ場合がある．

「(D-12) 片持ちばりのたわみ，およびその応用」に出題したように，ひずみの測定により荷重点の変位の算出もできる．

(D-11)　曲げにおけるせん断応力

◆ 46) 長方形断面を持つはりにある大きさのせん断力が作用する．はり断面に作用する最大せん断応力の値を求める．

◆ 47) 形状が等しい長方形断面を持つ棒 3 本を工の形に置いて，上下面を等間隔に木釘で固定する．ある大きさのせん断力が断面縦方向に作用するとき，釘 1 本あたりに作用するせん断力の値を求める．

曲げにおけるせん断応力は曲げ応力に比べて小さいので，積層板の層間せん断破壊など特殊な場合を除いて問題にならない．

(D-12)　片持ちばりのたわみ，およびその応用

◆ 48) 先端に集中荷重が作用する片持ちばりの最大たわみを求める．はりの長さ，断面二次モーメント，素材の縦弾性係数は与えられる．

◆ 49) 円形断面を持つ片持ちばり先端に集中荷重を作用させ，先端でのたわみ量を計測する．作用させる荷重の大きさの値を求める．

◆ 50) 正方形断面を持つ片持ちばりの最大たわみが与えられるとき，素材の縦弾性係数と固定端部分に作用する最大曲げ応力の値を求める．

◆ 51) 長方形断面を持つ片持ちばりがある．さらに，この長方形に比べ高さが半分で，幅が等しい長方形断面を持つ棒を縦に 2 本重ねた片持ちばりもある．はりの長さも材質も等しい．先端に同じ大きさの荷重を加える．先端でのたわみの比を求める．

◆ 52) 両端支持ばりの中央に集中荷重が作用するとき，荷重点でのたわみを式で表す．

長さ l，曲げ剛性 EI の片持ちばりの先端に大きさ P の集中荷重が作用するときのはり先端でのたわみ δ は $\delta=Pl^3/3EI$ で与えられる．

長さ l の両端支持ばりの中央に大きさ P の集中荷重が作用するときのはり中央でのたわみは，この式の荷重 P を $P/2$ に，長さ l を $l/2$ に置き換えて求めることができる．

また，荷重 P を $P/2$ に，長さ l を $l/4$ に置き換えて得られる値を 2 倍すれば，両端を固定した長さ l のはりの中央に大きさ P の集中荷重が作用するときのはり中央でのたわみを得ることができる．

◆ 53) 全長に等分布荷重が作用する片持ちばり

のたわみ曲線とたわみ角を求める．

◆ 54) 片持ちばりの先端と固定端の間の 1 か所に集中荷重が作用する．はりのたわみ曲線とたわみ角を求める．

◆ 55) 片持ちばりの先端にモーメントが作用する．はりのたわみ曲線とたわみ角を求める．

「(E) はりの複雑な問題」に示した典型的な片持ちばりの重ね合わせの問題では，以上の三つの問題の結果を適切に選択し重ね合わせて解を得る．

◆ 56) 片持ちばりの固定端からある距離離れた上面にひずみゲージを貼り付ける．貼り付けられたひずみゲージははりの長さ方向のひずみの値を与える．測定されるひずみの値から先端のたわみ量を求める．

「(D-10) 片持ちばりを用いた荷重の測定」では，先端に加えた荷重を求めている．

<u>(D-13)　両端支持ばりのたわみ</u>

◆ 57) 両端支持ばりに一つの集中荷重が作用する．荷重点でのたわみを表す式を求める．

◆ 58) 両端支持ばり全長に等分布荷重が作用するときのたわみ曲線とたわみ角を求める．

◆ 59) 両端支持ばりの両方の支点の所で大きさが等しく向きが反対のモーメントが作用する．このはりのたわみ曲線とたわみ角を求める．

以上は，「(E) はりの複雑な問題，(E-1) 重ね合わせで解くはりの不静定問題」の準備ともいえる．

◆ 60) 断面形状・寸法がわかった両端支持ばり中央にある大きさの荷重を加え，荷重点でのたわみの値を得た．はりの素材の縦弾性係数を求める．

<u>(D-14)　断面寸法・形状とたわみ</u>

◆ 61) 長方形断面を持つ長さが等しい三つの片持ちばりがある．最小の断面積のはりに比べ，一つは幅が倍，もう一つは高さが倍である．はりは同一の素材でできている．先端に同じ大きさの荷重を加えるとき，固定端に生じる最大曲げ応力の比と先端でのたわみの比を求める．

◆ 62) 断面積が等しく長さも等しい長方形断面を持つ三つの両端支持ばりの中央に大きさが等しい集中荷重を加える．一つのはりの断面は正方形で，一つのはりの断面は幅が半分，高さが倍の長方形，もう一つのはりの断面は，幅が倍，高さが半分の長方形である．はり中央の鉛直方向のたわみの順番を求める．

◆ 63) 長方形断面のはりとH形断面を工の向きに置いたはりがある．二つのはりで断面の幅と高さが等しい．二つのはりの断面の面積比と断面二次モーメントの比を求める．

断面二次モーメントの物理的意味を理解するための問題が並んでいる．

<u>(D-15)　重ね合わせ</u>

◆ 64) 片持ちばり先端に上向きに集中荷重が作用する．はりの自重を考慮して，先端でのたわみの値を求める．

「(E) はりの複雑な問題，(E-1) 重ね合わせで解くはりの不静定問題」でも，重ね合わせの問題を出題している．

(E)　はりの複雑な問題

<u>(E-1)　重ね合わせで解くはりの不静定問題</u>

◆ 1)　片端固定，片端単純支持のはりの中央に集中荷重が作用する．支点に作用する荷重の値および最大たわみを生じる位置とその値を求める．

◆ 2)　片端固定，片端単純支持のはりの全長に等分布荷重が作用する．支点に作用する荷重の値および最大たわみを生じる位置とその値を求める．

◆ 3)　両端固定の直線状のはりがある．はりの中央に集中荷重が作用する．曲げモーメント図を描き，最大曲げモーメントを求める．さらに，最大たわみを求める．

この最大たわみは，「(D) はりの曲げ，(D-12) 片持ちばりのたわみ，およびその応用」に示した方法でも求めることができる．

◆ 4)　両端固定の直線状のはりがある．はりの全域にわたって等分布荷重が作用する．曲げモーメント図を描き，最大曲げモーメントを求める．

◆ 5)　両端支持ばりの中央にばねが連結されて

いる．無負荷の状態でははりとばねの間に力が生じない．はり全長に等分布荷重を加える．はり中央でのたわみを求める．

◆ 6)　二つの両端支持ばりが十字形に置かれ，それぞれの中央で接合されている．この接合によりそれぞれのはりの中央での変位が等しくなる．はりの断面はともに長方形で，幅および高さが等しい．また，材質も等しい．片方の両端支持ばりの全長に等分布荷重が作用する．はり中央でのたわみの値を求める．

以上は，「(D) はりの曲げ，(D-12) 片持ちばりのたわみ，およびその応用」や「(D-13) 両端支持ばりのたわみ」に示した問題の解を重ね合わせて解く問題である．

(E-2)　断面寸法が不均一なはり

◆ 7)　先端に集中荷重が作用する片持ちばりがある．断面は円形で，断面に生じる最大曲げ応力は，長さ方向に一定である．断面の直径の変化をはりの先端からの距離の関数として求める．

平等強さのはりの断面寸法を求める問題では，先端に集中荷重が作用する，あるいは全長で等分布荷重が作用する荷重条件が多い．今回は円形断面の問題を出題したが，断面形状は長方形で，幅または高さを一定として，逆に高さまたは幅をはり先端からの関数として求める場合が多い．

(E-3)　組み合わせはり

◆ 8)　長方形断面を持つアルミニウム合金製帯板をコア材にして，板の表と裏にこれと幅が等しい鋼製帯板を貼り付ける．貼り付ける 2 枚の鋼製帯板の厚さは等しい．積層した帯板に曲げモーメントが作用する．帯板の曲げ剛性，鋼製帯板，アルミニウム合金製帯板に作用する曲げ応力の最大値を求める．

鋼製帯板の幅をそのままにして，アルミニウム合金製帯板の幅をアルミニウム合金と鋼の縦弾性係数の比の分だけ細くする．このようにして，積層板をエ形断面を持つ鋼製板に置き換えれば，曲げ剛性を容易に求めることができる．

(F)　柱の座屈

(F-1)　座屈荷重の算出

◆ 1)　両端が回転自由の長柱の座屈荷重を式で表す．片端固定，片端自由のときの座屈荷重を求める公式は与えられる．

◆ 2)　両端固定の長柱の座屈荷重を式で表す．

◆ 3)　一端固定，他端回転自由の長柱の座屈荷重と，①片端固定，片端自由，②両端回転自由，③両端固定のそれぞれの長柱の座屈荷重との比を求める．一端固定，他端回転自由の長柱の座屈荷重を求める公式は与えられる．

◆ 4)　長方形断面を持つ長柱の座屈荷重の値を求める．両端は回転自由である．座屈荷重を求めるための公式は与えられる．

以上は，片端固定，片端自由の条件下でのオイラーの公式 $P_{cr}=\pi^2 EI/(4L^2)$を，他の境界条件に適用する問題ともいえる．

(F-2)　座屈に至らない長柱の長さ，曲げ剛性の影響

◆ 5)　長柱の軸方向に圧縮荷重を加える．長柱の材料が降伏するまで座屈に至らない最長の長柱の長さの計算式を導く．正方形断面を持ち，片端固定で片端自由の場合や，円形断面を持ち，両端回転自由の場合がある．座屈荷重を求めるための公式は与えられる．

◆ 6)　長方形断面を持つ長柱の両端が固定されている．座屈荷重を指定して，座屈が生じるときの長柱の最小長さの値を求める．座屈荷重を求めるための公式は与えられる．

◆ 7)　一端固定で，他端自由の角柱の木材がある．角材の長さ，素材の縦弾性係数，圧縮強度，支えるべき軸荷重の大きさ，安全率が与えられる．角柱の断面を正方形として，正方形の一辺の長さを求める．

◆ 8)　両端回転自由の 2 本の長さが等しい長柱を考える．1 本の長柱の断面は正方形で，もう 1 本の長柱の断面は円形で，二つの長柱の断面積は等しい．座屈荷重の比を求める．

◆ 9)　T 形断面を持ち，両端回転自由の長柱の座屈荷重を求める．座屈荷重を求めるための公式は与えられる．

◆ 10) 長さと断面積が等しいアルミニウム合金製丸棒と鋼製丸棒とがある．アルミニウム合金製丸棒には両端固定の境界条件で軸方向に圧縮荷重を，鋼製丸棒には両端回転自由の境界条件で軸方向に圧縮荷重を加える．座屈荷重の比を求める．

オイラーの公式の中で，長さ L，断面二次モーメント I，縦弾性係数 E に注目した問題が並ぶ.

(F-3)　上昇温度

◆ 11) 両端を固定した円柱が熱応力の発生により座屈する．座屈が発生するまでの上昇温度を求める．座屈荷重を求めるための公式は与えられる．

座屈の問題と熱応力の問題を組み合わせている．

(G)　複雑な応力

(G-1)　主応力および主せん断応力の値と方向の算出，生じる主せん断応力の順位付け

◆ 1)　正方形板の一つの側面に正方形の辺に平行なせん断荷重を加える．回転および平行移動を生じさせないために残りの三つの側面に作用させるせん断荷重を求める．

共役($\tau_{xy} = \tau_{yx}$)についてここで説明する．

◆ 2)　平面応力状態となっているある点の応力状態を与え，二つの主応力の値および大きい方の主応力の方向を求める．

◆ 3)　平面応力状態となっているある点の応力状態を直角座標系の応力成分で与え，直角座標系を時計回りにある角度回転したときの各応力成分を求める．

◆ 4)　薄肉円筒にねじりモーメントと引張荷重を同時に加える．円筒壁に生じる二つの主応力と最大せん断応力を求める(ねじりと引張りの組み合わせ)．

◆ 5)　平面応力状態となっているある点の応力状態を与え，主せん断応力の値，および主せん断応力の方向を求める．

◆ 6)　主応力の方向と最大せん断応力(主せん断応力)の方向がなす角度を答える．また，主応力の大きさと最大せん断応力の大きさとの関係を答える．

◆ 7)　平面応力状態で，絶対値が等しく，向きが反対の 2 軸応力が作用する．主せん断応力の値を求める．

◆ 8)　固体が，① 引張りと圧縮の 2 軸負荷，② 1 軸圧縮負荷，③ 1 軸引張負荷(②より絶対値が小さい)，④ 等 3 軸引張負荷(または 2 軸引張負荷)，⑤ 単純せん断負荷のいずれかの負荷下にある．固体に生じる主せん断応力の大きさの順位付けを行う．

概ね，主応力の大きさと方向，主せん断応力の大きさと方向を求める問題が並ぶといえる．

(G-2)　モールの応力円と純せん断

◆ 9)　垂直応力 σ を横軸に，せん断応力 τ を縦軸にとったモールの応力円を考える．以下の中から，純せん断の応力状態を表すモールの応力円を選ぶ．モールの応力円が，①中心が σ 軸上の負の領域にあり，原点に接する，②中心が τ 軸上の負の領域にあり，原点に接する，③中心が τ 軸上の正の領域にあり，原点に接する，④中心が原点にある，⑤中心が σ 軸上の正の領域にあり，原点に接する．

◆ 10) 平面応力状態となっているある点の応力状態が与えられる．モールの応力円の中心の座標を答える．

◆ 11) 直径がわかっている円柱の片端を固定してもう一つの端にねじりモーメントを作用させる．円柱表面で円柱の中心軸に対して±45°方向の垂直ひずみを測定する．円柱の素材のせん断弾性係数を求める．

モールのひずみ円を使用すると容易に解ける問題をここに記した．

「(G-1) 主応力および主せん断応力の値と方向の算出，生じる主せん断応力の順位付け」に示した問題の多くはモールの応力円を利用して容易に解くことができる．

(G-3)　面に作用する垂直応力とせん断応力

◆ 12) 棒の中心軸方向に引張荷重を加える．中心軸に対して法線がある角度を持つ面に作用する垂直応力とせん断応力を式で表す．

◆ 13) 厚さ一定の剛体円盤を直径部分で二つに

切断し，切断面を接着剤で接着する．この接着部では，生じる垂直応力かせん断応力が基準値を超えるとき，接着面がはく離する．接着した円盤の中心を通る直線の方向に引張荷重を加えるとき，はく離を生じない荷重の方向と接着面の法線方向がなす角度の範囲を求める．

二つ目の問題は一つ目の問題の応用例である．

(G-4)　曲げと引張り・圧縮の組合わせ

◆ 14) 直線部分の断面が円形のC形フックをいくつか連結して引張る．C 形フックの直線部分の断面に作用する最大引張応力の値を求める．

◆ 15) 本体直線部分の断面が正方形のC形クランプがある．このクランプを使って物体を或る荷重で挟んだとき，本体直線部分の断面に生じる最大引張応力の値を求める．

◆ 16) 正方形断面を持つ棒の端面に集中荷重(圧縮)が作用する．この集中荷重は，正方形の対角線でない方の対称軸上に作用し，作用点は端面の重心からある距離の位置にある．棒に生じる引張応力の最大値および最小値を求める．

◆ 17) 正方形断面を持つ棒の端面上のある点に集中荷重が作用する．この集中荷重が作用する点は正方形断面の対角線と同一の対角線を持つ正方形の内部にあるとしたい．荷重が作用する点の存在範囲を表す正方形の一辺の長さを，正方形断面の一辺の長さの 1/5 とする．荷重の大きさ，棒の許容応力は与えられる．正方形断面のサイズはいくら必要か求める．

最後の二つの問題は米国の材料力学の教科書では広く取り扱われているようである[8)]．

(G-5)　曲げとねじりの組合わせ

◆ 18) 丸棒の一端を固定する．もう一方の端に円盤を取り付け，丸棒にねじりモーメントが作用するように円盤の縁に円盤の直径と丸棒の中心軸に垂直な方向の荷重を加える．この荷重によって丸棒には曲げモーメントも作用する．丸棒の固定端に生じる最大垂直応力を式で表す．

◆ 19) 曲げモーメントとねじりモーメントを受ける円柱の直径を，せん断応力を基準として決定するための式を導く．

◆ 20) 円形断面を持つ L 形の棒がある．L 形の上端部を固定し，もう一つの先端にある大きさの荷重を加える．荷重の方向はLでできる平面と垂直な方向である．棒の固定端に生じる最大せん断応力が許容せん断応力以下となる棒の直径を求める．

(G-6)　圧力を受ける薄肉円筒などに生じる応力の算出および肉厚の決定

◆ 21) 内圧が作用する薄肉円筒に生じる周方向応力と軸方向応力を求める．式を導くときと，値を求めるときがある．

◆ 22) 内径，板厚，内圧が異なる三つの薄肉円筒形圧力容器がある．一つの圧力容器を基準とすると，別の容器は内径のみが 2 倍で他は同一，もう一つの容器は内径，板厚，内圧とも 2 倍である．薄肉円筒に生じる周方向応力の比を求める．

◆ 23) 内径，肉厚がわかっている薄肉円筒に内圧を加える．許容引張応力は与えられる．加えることのできる圧力の最大値を求める．

◆ 24) 薄肉円筒の内径，内圧，許容応力が与えられる．内圧に耐えるための肉厚を決定する．

◆ 25) 内径，肉厚がわかっている薄肉円筒にある内圧を加える．薄肉円筒にはさらにねじりモーメントを加える．円筒の周方向と中心軸方向を軸とする直角座標を取り，二つの垂直応力とせん断応力を求め，さらに二つの主応力と最大せん断応力を求める．

これは，「(G-1) 主応力および主せん断応力の値と方向の算出，生じる主せん断応力の順位付け」の部分に関連する問題である．

◆ 26) 球殻の内径と肉厚，さらに内部に作用する圧力が与えられる．このとき，球殻に生じる垂直応力を求める．

◆ 27) 球形タンクを設計したい．球形タンクの内径と内圧は定められている．球形タンクを作製するための鉄鋼材料の候補は五つあり(密度は等しい)，それぞれの材料の許容応力と単位質量あたりの価格も与えられる．各材料を使用したときの球形タンクの壁の厚さを求め，球形タンクの壁 1m^2 あたりの材料費を算出する．得られた材料費の比較から，球形タンク作製に使用する鉄鋼材料を決定する．

この問題のように，材料力学の観点からの材料選択に関する問題の出題も必要であろう．

(G-7)　ポアソン比の範囲と体積変化

◆ 28) いくつかの数値の中からポアソン比がとりうる値を選択する．

◆ 29) 体積が変化しない弾性体のポアソン比を求める．

◆ 30) 丸棒を引張ったときの体積変化の割合を求める．荷重，断面積，長さ，縦弾性係数，ポアソン比は与えられる．

「(A) 応力とひずみ，(A-4) 荷重と垂直方向の変形，ポアソン比など」にもポアソン比を扱った問題がある．

(G-8)　応力－ひずみ関係式，ミーゼス応力，ひずみ－変位関係式

◆ 31) 平面応力状態となっているある点の応力状態が直角座標系で与えられる．素材の縦弾性係数，ポアソン比も与えられる．一つの軸方向の垂直ひずみの値を求める．

◆ 32) 直角座標系におけるある軸方向の垂直ひずみを，縦弾性係数，ポアソン比，垂直応力の 3 成分を使って式で記述する．

◆ 33) 内圧が作用する薄肉円筒の直径の増加量の値を求める．

この問題で，周方向の応力と軸方向の応力は，「(G-6) 圧力を受ける薄肉円筒などに生じる応力の算出および肉厚の決定」で出題した問題の解を利用して求めることができる．

◆ 34) 縦弾性係数とポアソン比が既知の素材で作られた矩形板がある．矩形板の厚さ方向に z 軸を，z 軸と垂直な矩形板の辺の方向に x 軸と y 軸を取る．この矩形板で，x 軸に垂直な面と y 軸に垂直な面にある大きさの引張荷重が作用する．z 軸に垂直な面で x 軸方向と y 軸方向の垂直ひずみを測定したところある値が得られた．矩形板に生じる二つの垂直応力と最大せん断応力の値を求める．

◆ 35) 直角座標系において z 軸方向に拘束しひずみを 0 にする．さらに，x 軸方向のみに応力を加える．応力状態がミーゼスの降伏条件を満たすとき，引張応力は降伏応力の何倍になるか．縦弾性係数とポアソン比の値，ミーゼスの降伏条件の式は与えられる．

◆ 36) 直角座標系において，y 軸および z 軸方向に拘束しひずみを 0 にする．さらに，x 軸方向のみに応力を加える．拘束した方向の垂直応力を求める．

◆ 37) 正方形板の向かい合う二つの側面に引張応力を加え，残りの二つの側面に絶対値が等しい圧縮応力を加える．平面応力状態のときのミーゼス応力を求める．

◆ 38) 正方形板の四つの側面に大きさの等しい引張応力を加える．板の素材の縦弾性係数とポアソン比は与えられる．平面応力状態のときと平面ひずみ状態のときのミーゼス応力を求める．

◆ 39) 二次元問題におけるひずみと変位の関係式を記述する．

主として，構成方程式およびミーゼス応力に関する問題を配した．有限要素解析の結果はミーゼス応力で表示されることが多く，その意味でもミーゼス応力への理解は重要である．

(H)　エネルギー法

(H-1)　一軸引張荷重下の棒に蓄えられるひずみエネルギー

◆ 1)　一軸引張荷重下の棒に蓄えられるひずみエネルギーを求める．荷重を変数とした式で表現する．あるいは，変位を変数とした式で表現する．

◆ 2)　一軸引張荷重下の段付き棒に蓄えられるひずみエネルギーを荷重を変数とした式で表現する．

(H-2)　衝撃荷重と衝撃応力

◆ 3)　鉛直に吊り下げられた棒の下端に静的に重りを置いたときの棒の伸びと，位置エネルギーとひずみエネルギーのつり合いを考慮して求めた棒の伸びとを比較する．

(H-3)　カスティリアノの定理の適用

◆ 4)　はりの片端を単純支持，もう一方の端を固定する．このはりの固定端と単純支持端の間に集中荷重が作用する．はり全体に蓄えられるひずみエネルギーが集中荷重と単純支持端に作

用する反力の関数として与えられる．単純支持端に作用する反力を式で表す.

この問題は，カスティリアノの定理の理解を問う珍しい資格試験の問題を参考に作成した.

(I)　骨組構造とシミュレーション

(I-1)　トラスの不静定問題

◆ 1)　剛体の天井に 3 本の棒の一端が別々にピン接合され，3 本の棒の他端は一つにピン接合されている．中央の棒は鉛直下向き，他の 2 本の棒は中央の棒に対して対称な位置にある．左右に配した棒は断面積，材質ともに等しく，中央の棒は断面積，材質ともに 2 本の棒と異なる．3 本の棒の接合点に鉛直下向きの荷重を加えるとき，それぞれの棒に作用する引張荷重を求める.

「(B) 引張りと圧縮，(B-4) トラスと力の分解」に掲載の問題の解を利用する.

(I-2)　有限要素法の要素分割に関する問題，三角形 3 節点要素，四角形 4 節点アイソパラメトリック要素に関する問題

◆ 2)　有限要素法における要素分割に関する問題．① 応力変化が大きいところでは，要素分割を細かくすること，② 複数の要素分割を使用して計算を行い，結果の収束の確認を行うこと，③ 境界条件が変更されれば，要素分割に変更の可能性が生じること，④ 十分な精度が得られる要素分割による計算結果を用いて評価を行うべきであることを問う.

◆ 3)　有限要素法で使用する要素についての問題．①三角形 3 節点要素や四角形 4 節点アイソパラメトリック要素内の変位やひずみ・応力の次数について，② 隣接要素間での変位やひずみ・応力の不連続性について，③ 解析精度に与える要素形状の影響について，④ 要素剛性行列のサイズについて問う.

材料力学の講義の中で有限要素法についての解説を行う場合，トラス構造を対象とするマトリックス変位法の解説から初めて，剛性マトリックス(1 次元，2 次元)について説明し，2 次元有限要素法の説明に至るのが適当であろう．モデルの作成，要素分割，材料定数の設定，境界条件の設定といった有限要素法の流れの解説の中で，要素分割時に注意すべき事項の説明を行うことになろう.

(J)　強度と設計

(J-1)　材料強度一般

◆ 1)　材料強度の全般にわたる問題では以下に示すテクニカルタームが登場するであろう.

- 引張試験関連：弾性係数，公称応力，真応力，公称ひずみ，対数ひずみ，降伏応力，降伏点，加工硬化，バウシンガ効果
- 応力分布関連：主応力，残留応力，応力集中，応力集中係数，公称応力，応力拡大係数，靭性，破壊靭性試験
- 静的破壊・動的破壊関連：ぜい性破壊，延性材料，最大主応力説，最大せん断応力説，トレスカの条件，シャルピー試験，ぜい性ー延性遷移温度
- 疲労試験関連：疲労破壊，S-N 曲線，疲労限度，マイナー則
- クリープ試験関連：クリープ，高温強度
- 金属組織関連：析出硬化，マルテンサイト変態，時効硬化，金属間化合物

「材料力学」という科目の中では，材料強度に関する事項を教えることは少ないであろう．しかし，たとえばマサチューセッツ工科大学機械工学科では「Mechanics and Materials I」に続いて開講される「Mechanics and Materials II」の中で「弾性と固体力学」の後に，「塑性とクリープ」，「破壊」，「疲労」，「材料選択」について講義を行っているようである [9]．受講生の多くが卒業後に要求される知識の一つに材料強度があることから，このように対応しているのであろう.

(J-2)　疲労に関する問題

◆ 2)　疲労強度改善に関する問題．① 表面粗さを低減させる，② 表面を硬化させる，③ 熱処理により静的強度レベルを上昇させる，④ 材料の組織を微細化する，⑤ 表面付近に圧縮の残留応力を生じさせる.

◆ 3)　疲労試験から得られる S-N 曲線に関する問

題．① S-N 曲線における，縦軸と横軸の意味，② 横軸の繰返し数がある値以上になると，縦軸の応力振幅が一定となる場合があること，③ 無限回の繰返しに耐える応力振幅の最大値が疲労限度であること，④ 一般に，鋼材の疲労限度はおよそ 10^7 回以上で与えられること，⑤ 引張りの平均応力が大きくなると疲労限度は減少すること．

(J-3)　腐食に関する問題

◆ 4)　腐食に関する問題．① 乾食と湿食，② 不働態膜の形成，③ 海水中でのステンレス鋼の強度，④ 応力腐食割れ，⑤水素脆化について問う．

腐食に関しては以下のキーワードの関連事項を教える必要があろう．

- 巨視的腐食：異種金属接触腐食(ガルバニック腐食)，孔食，隙間腐食，選択腐食，エロージョン
- 微視的腐食：粒界腐食，応力腐食割れ，腐食疲労，水素脆性
- 応力腐食割れ発生条件の 3 因子：材料因子，力学因子，環境因子

(J-4)　強度分布，応力の大きさの分布に関する問題

◆ 5)　それぞれが正規分布に従う応力と強度の差を定義する．その差の平均値と標準偏差を求める．

◆ 6)　構造物の耐力と作用荷重の確率密度関数が与えられる．構造物の破壊確率を求める．

強度や負荷応力がばらつきを持つという考え方は実務を遂行する上で重要である．しかし，材料力学を担当する教員のみでこれに対応することは難しい．確率論や統計学を担当している教員との連携が必要であろう．

(J-5)　応力集中

◆ 7)　無限平板に引張応力を加える．この無限板には楕円孔があいており，楕円孔の長軸の方向は応力の方向と垂直である．楕円孔の縁での応力は，無限板に加えた応力の何倍になるかを答える．

◆ 8)　無限平板に引張応力を加える．この無限板には楕円孔があいており，楕円孔の軸の方向は応力の方向と垂直である．楕円孔の縁での応力を小さくする楕円の長軸と短軸の長さの組み合わせを選択する．

◆ 9)　円孔を有する無限平板に引張応力を加えたときの応力集中係数が，円孔の直径によらず，3 であることを問う問題.

◆ 10)　グラフから応力集中係数を読み取って許容応力を算出する問題.

(K)　材料力学に関連する材料定数

(K-1)　鉄鋼材料の材料定数

◆ 1)　提示された数値の中から，軟鋼の降伏点と引張強度，鉄鋼材料の縦弾性係数，せん断弾性係数およびポアソン比，さらに密度および線膨張係数を選択する．

3. おわりに

本報告では，機械系学科で講義科目「材料力学」を担当する教員向けに，資格試験の問題などをもとにして作成した問題 230 問を提示した．

本報告で提示した問題のレベルは，技術士 1 次試験や機械設計技術者試験(2 級，3 級)とほぼ同じであり，問題の範囲は，技術士 1 次試験や機械設計技術者試験の出題範囲をカバーしている．また，資格試験での出題は数少ないが，実務を遂行する上で必要となる寸法決定や材料選択の問題を組み入れた．

さらに，材料力学の中で教授することは少ない腐食を含む材料強度に関する基本的なテクニカルワード，有限要素法の基礎事項に関する問題，有限要素解析結果解釈時にも必要となるミーゼス応力に関する問題も盛り込んだ．

予習・復習，グループワークやアクティブラーニングの問題作成にご利用いただけたなら幸いである．

参考文献

1)　経済産業省，第 4 次産業革命人材育成推進会議（第 4 回）配布資料 15，産業界のニーズの実態に係る調査結果，p.4, 2017.3.22 開催,

https://www.kantei.go.jp/jp/singi/keizaisaisei/miraitoshikaigi/jinzaiikusei_dai4/index.html, ＜2018.10.14 アクセス＞
2) 伊藤 裕子，技術者の業務に役立った大学の専門講義とスキルアップの状況の調査分析，工学教育, Vol. 66, pp.34-39, 2018.
3) 小島 彰，材料系産学連携人材育成の課題と今後の在るべき姿 –鉄鋼工学セミナーにおける若手技術者へのアンケート結果から見えてきたもの–，ふぇらむ，Vol.16, pp. 17-25, 2011.
4) 一般社団法人 日本機械設計工業会ホームページ, https://www.kogyokai.com/exam/past/ <2018.09.10 アクセス>
5) 過去問題（第一次試験）, 公益社団法人 日本技術士会ホームページ, https://www.engineer.or.jp/c_categories/index02021.html <2018.09.10 アクセス>
6) 認定プログラム一覧，一般社団法人 日本技術者教育認定機構ホームページ，https://jabee.org/accreditation/program ＜2018.10.13 アクセス＞
7) 日本機械学会，材料力学 (JSME テキストシリーズ), 2007, 日本機械学会.
8) K. P. Palmer and A. E. Arges, Mechanics of Materials, p. 219, 1963, McGraw-Hill Book Company.
9) Mechanics and Materials II, Massachusetts Institute of Technology web site, https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-002-mechanics-and-materials-ii-spring-2004/ <2018.9.6 アクセス>

要　旨

本報告では，機械系学科で講義科目「材料力学」を担当する教員向けに，資格試験の問題などをもとにして作成した問題 230 問を提示した．提示した問題のレベルは，技術士 1 次試験や機械設計技術者試験(2 級，3 級)とほぼ同じであり，問題の範囲は，技術士 1 次試験や機械設計技術者試験の出題範囲をカバーしている．また，資格試験での出題は数少ないが，実務を遂行する上で必要となる寸法決定や材料選択の問題を組み入れた．さらに，材料力学の中で教授することは少ない腐食を含む材料強度に関する基本的なテクニカルワード，有限要素法の基礎事項に関する問題，有限要素解析結果解釈時にも必要となるミーゼス応力に関する問題も盛り込んだ．予習・復習，グループワークやアクティブラーニングの問題作成にご利用いただけたなら幸いである．

キーワード：材料力学，技術士1次試験，機械設計技術者試験，予習・復習，グループワーク，アクティブラーニング