査読論文

真法弟算記のある問題についての数値解析を用いた調査*

土屋 拓也† ・今井 悠人††

On a solving of the question of Shinpouteisanki with numerical analysis

Takuya Tsuchiya and Yuto Imai

ABSTRACT

We investigate the solution of a problem in Shinpoteisanki. Since solving the higher order equation, we get the solution of the equation with numerical calculation. In addition, we investigate the characters of the solution by using analytical method.

Key Words: *History of Mathematics, Wasan, Shinpouegen, Numerical Analysis*

キーワード: 数学史, 和算, 真法恵賢, 数値解析

1. はじめに

真法弟算記 [1](以後, 弟算記と呼ぶ) は, 江戸時代八戸藩で和算を藩士に教授した真法恵賢 (1657–1753) の弟子達の掲げた算額をまとめた書籍である．真法恵賢は, 八戸藩 4 代目藩主である南部広信に仕えた和算家であり, 八戸藩の和算の流派である真法賢流という流派の祖として知られている．和算において, その成果が広く知られているのは関孝和 (生年不明–1708) やその弟子の建部賢弘 (1664–1739) であり, それぞれその業績についても調査された成果が多い (例えば, 関,[2–5] 建部 [6] など)．一方で, 真法恵賢についてはさほど広くは調べられておらず, 弟算記に関してはその全文の書き起こしと, 平山諦による解説 [7] がある程度である．特に弟算記に記された問題の解答については, 前述の平山以外にはほとんど解答の確認がされておらず不十分である (弟算記の最初の問題の解答には, 吉岡による解説 [8] はある).

和算の研究においては, 和算家についての調査 (例えば, 前述の関や建部のもの [2–6] や北武蔵の地域限定でのもの [9] など) が主流である．一方で, 問題の解に関する調査は, 古文書に関するもの [10–13] や算額に関するもの [14–16] などがあるものの, 和算家の調査に関する文献と比較して少ない．そのため, その解答の調査がされずに据え置かれている問題も多いと思われる．本研究では, 現代的手法を用いて既存の解を精査す

* 令和4年9月25日 受付
令和5年1月23日 受理

† 基礎教育研究センター
†† 二松学舎大学 国際政治経済学部 国際経営学科

ることで, 現代数学の観点からその解答の価値を再確認することを目的とする.

先行研究 [17] では, 真法恵賢の人物紹介と弟算記に記載されたいくつかの問題について, その解を現代的手法を用いて確認を行った. その続きとして, 本論文では先行研究で扱えなかった問題について, その解答の精査を行う. 弟算記を含め, 和算で扱われる方程式は高次のものが多く, 手計算で解くことが困難なものが多い. そこで本論文では, 解の条件を解析的に精査しつつ, 数値計算を手法に用いることで, 解の値の精度も評価する.

2. 問題

次の問題は, 真法恵賢の弟子の尾刀 (おがた) 和右衛門為隆 (生没年不明) が 1741 年に, 福岡岩屋の観音 (岩手県二戸市福岡にある岩屋観音堂のことかと思われる) に掛けられた算額の問題について, 解答をつくり, さらに新たな問題を加え, 盛岡八幡 (岩手県盛岡市の盛岡八幡宮のことかと思われる) に算額として掲載したものとなっている. 新たな問題は第三者へ問いかけた問題 (遺題) である. ここでは, 解答の存在する前半の問題の解答の調査をする. 後半の問題に関しては, 解の一意性が示せず解答までの詳細な説明ができなかったため, 付記に問題と解答の一部, 答えと思われる値を載せる.

2.1 原文

図 1 から図 3 に原文の書き起こしを載せる.

2.2 書き下し文

次に 2.1 節の原文の書き下し文を載せる.

今鉤股弦の鉤に併べるに随い三敘円を妊めるあり。只云う大円径をもって股を減じ、餘り五十六歩七分。また云う、中円径小円径の差い一十九歩六分。三円径及び鉤股弦各々幾何を問う。

答曰く、

大円径　七十九歩三分八
中円径　三十五歩二分八
小円径　一十五歩六分八
股　一百三十六歩越零八
鉤　一百三十四歩九分四六毫
弦　一百九十一歩六分四六毫

術に曰く、天元一を立て、小円径となし、これにまた云う数を加入して位に寄せ、且つ小円径をもって只云數に乗じて右に寄せ、次に右を自乗し、得るに位を乗じ、また小円径を乗じ、これを四段にして左に寄せ、あわせて位を自乗しもって右に加入し、得るにまた云う数を乗じ、またこれを自乗し左に寄せたると、相い消して開方の式を得る。三乗の法に実を除いて商に小円径を見、もって中円径の冪を除いて大円径となし、これによりて鉤股弦を求るなり。

右は十余年已前に何人か彼の好問を相製しこれに答術を発する者のあらばこれを盛岡八幡の辺に掛け顕せ、と、これを板に書き、もって福岡岩屋の観音に掛けると云々。当夏或る人これを予に見語せり。予頗るこれを思うに

今有鉤股弦之妊隨併鉤三敘圓只云以大圓徑
減股餘五十六歩七分又云中圓徑小圓徑之差
一十九歩六分問三圓徑及鉤股弦各幾何

答曰

大圓徑七十九歩三分八釐

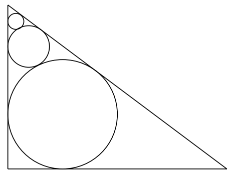
中圓徑三十五歩二分八釐

小圓徑一十五歩六分八釐

股一百三十六歩越零八釐

鉤一百三十四歩九分四釐六毫

弦一百九十一歩六分四釐六毫



術曰立天元一為小圓徑此加入又云數而寄位
且以小圓徑乘只云數而寄右次自乘右得乘位
亦乘小圓徑四段此而寄左并自乘位以加入右
得乘又云數復自乘之與寄左相消而得開方之
式三乘之法除實而商見小圓徑以除中圓徑之
冪而為大圓徑依此而求鉤股弦也

右者於十餘年已前何人相製彼好問若有發之

図１　原文１ページ目．鉤股弦 (直角三角形) の中に円を３つ含む問題に対する解答が記載されている．

既に多年を過ぐるに、そのうち必ずこれに答術を発する者あらんや。然りといえども我また更に拙き答術を相顕しけり。視る人これに一笑を加えよ。聊かまた彼の先好仕組みの式に順いて、唯だ一円を益し、賎しき所問を幾んと議して、これの試詢に報ずること左のごとし。

今鉤股弦の鉤に併べるに随い四敘円を妊めるあり。只云う丙円径を平方に開くと、丁円径を平方に開くと相和し得るところ四十叚にこれを述するうち、甲円径を減じ余り五十四歩。また云う乙円径を自乗するうち鉤を減じ余り三十九歩。四円径および鉤股弦各々幾何を問う。

答曰く、　甲円径

乙円径

丙円径

丁円径

鉤　股　弦

右恭しく望む、達算の士これに答術を考え顕せ。

奥州　南部　三戸

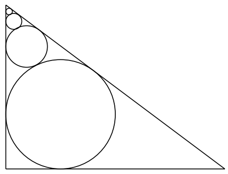
真法賢弟子　尾刀和右衛門

納め奉る御宝前　　阿部之流　為隆

寛保　辛酉　八月　吉日　慎てこれを書す

右は何人に対し盛岡八幡に掛ける鉤股円算の答術所問。

答術者掛顯之于盛岡八幡之邊薄板書此以掛
福岡岩屋之観音云云當叟或人是見語予予頗
思焉既過多年其中必有發之答術者矣乎雖然
我亦更相顯拙答術焉視人加之一笑聊又順彼
先好仕組之式而唯益一圓幾議賤所問而報伊
之試詢事如左
今有鉤股弦之妊隨併鉤四敘圓只云丙圓徑開
平方與丁圓徑開平方相和所得四十段述之內
減甲圓徑餘五十四步又云自乘乙圓徑內減鉤
餘三十九步問四圓徑及鉤股弦各幾何
答曰　甲圓徑
乙圓徑
丙圓徑
丁圓徑
鉤　股　弦



右恭望達蕘之士考顯之答術
奥列　南部　三戸

図2　原文2ページ目. 図1に記載された問題の遺題が載せられている.

3. 前半の問題

3.1　前半の問題の内容

3つの円が短辺に沿って並べたものを含む直角三角形がある. 直角三角形の中辺と大円の直径との差が56歩7分 (56.7). 中円と小円の直径の差が19歩6分 (19.6). このとき, 3つの円の直径及び直角三角形の各辺の長さを求めよ.

3.2　尾刀による前半の問題の解答

尾刀による前半の問題の解答を, その書き下し文に沿って記載しておく. 尾刀の用いた解法は書き下し文に「天元一を立て、」とあるように天元術を用いている. 天元術では, 何かの値 (この問題では小円径の直径) を変数として, 高次方程式を立てて解を求める. 解を求める方法は例えば算木を用いるなど, 現在でいうところの逐次近似法のように解を数値的に求めていく. なお, 真法恵賢は天元術を得意としており, その弟子たちの解法も天元術を用いることが多い. それから, 原文及び書き下し文の「円径」は円の直径, 「鉤」は直角三角形の高さ, 「股」は直角三角形の底辺, 「弦」は直角三角形の斜辺であることに注意しておく.

眞法賢弟子　尾刀和右衛門

奉納御寶前　阿倍之流　為隆

寛保　辛酉　八月　吉日　愼而書之

右者對何人掛盛岡八幡鉤股圓筭之答術所問

図 3　原文 3 ページ目. 図 1, 図 2 に関する情報が載せられている.

問題文「只云う大円径をもって股を減じ、餘り五十六歩七分」

$$(\text{只云う}) := (\text{股}) - (\text{大円径}). \tag{1}$$

$$(\text{股}) - (\text{大円径}) = 56.7. \tag{2}$$

ここで, := は定義の意味で用いている. 問題文「また云う、中円径小円径の差い一十九歩六分」

$$(\text{また云う}) := (\text{中円径}) - (\text{小円径}). \tag{3}$$

$$(\text{中円径}) - (\text{小円径}) = 19.6. \tag{4}$$

「天元一を立て、小円径となし」

$$x := (\text{小円径}). \tag{5}$$

「これにまた云う数を加入して位に寄せ」

$$(\text{位}) := (\text{小円径}) + (\text{また云う}) = (\text{中円径}). \tag{6}$$

「小円径をもって只云数に乗じて右に寄せ」

$$(\text{右}) := (\text{小円径})(\text{只云う}). \tag{7}$$

「右を自乗し、得るに位を乗じ、また小円径を乗じ、これを四段にして左に寄せ」

$$(\text{左}) := 4(\text{右})^2(\text{位})(\text{小円径}). \tag{8}$$

「あわせて位を自乗しもって右に加入し、得るにまた云う数を乗じ、またこれを自乗し左に寄せたる」

$$(\text{左}) := \{(\text{右}) + (\text{位})^2\}^2(\text{また云う})^2. \tag{9}$$

「相い消して開方の式を得る」は, $V_1 = 56.7$, $V_2 = 19.6$ として式 (8) と式 (9) を整理すると $(\text{位}) = x + V_2$, $(\text{右}) = V_1 x$ なので

$$\begin{aligned}(8)\text{ かつ }(9). \quad &\Leftrightarrow \quad 4V_1^2x^2(x+V_2)x = \{V_1x + (x+V_2)^2\}^2V_2^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(4V_1^2 - V_2^2\right)x^4 + \left(4V_1^2V_2 - 2V_1V_2^2 - 4V_2^3\right)x^3 + \left(-V_1^2V_2^2 - 4V_1V_2^3 - 6V_2^4\right)x^2 \\ &\quad + \left(-2V_1V_2^4 - 4V_2^5\right)x - V_2^6 = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

となり, 小円の直径に関する 4 次方程式となる. 「開方の式」は 2 次以上の方程式のことである.

最後に式 (8) と式 (9) が等号で結ばれる理由を述べておく. 直角三角形の面積と大円の直径との関係 (後述の式 (16) と $S = (1/2)ab$) から

$$2(\text{鉤})(\text{股}) - 2(\text{大円径})((\text{鉤}) + (\text{股})) + (\text{大円径})^2 = 0. \tag{11}$$

また, 大円, 中円, 小円の直径に関して

$$(\text{大円径})(\text{小円径}) = (\text{中円径})^2 \tag{12}$$

が成り立つ (後述の式 (24)). このとき, 大円の直径の中心 (後述の図 4 の $\mathrm{O_L}$), 鉤と弦に挟まれる頂点 (後述の図 4 の A), 鉤と大円の交点 (後述の図 4 の $\mathrm{S_L}$) で作られる直角三角形 (後述の図 4 の $\triangle \mathrm{AS_LO_L}$) と小円の中心 (後述の図 4 の $\mathrm{O_S}$), 中円の中心 (後述の図 4 の $\mathrm{O_M}$), 鉤と中円の中心を結ぶ直線と小円から下した垂直線との交点 (後述の図 4 の $\mathrm{T_M}$) で作られる直角三角形 (後述の図 4 の $\triangle \mathrm{O_ST_MO_M}$) が相似であることから

$$(2(\text{鉤}) - (\text{大円径}))((\text{中円径}) - (\text{小円径})) = 2(\text{大円径})\sqrt{(\text{小円径})(\text{中円径})}. \tag{13}$$

式 (11) と式 (13) より

$$(\text{股})((\text{中円径}) - (\text{小円径})) = 2((\text{股}) - (\text{大円径}))\sqrt{(\text{小円径})(\text{中円径})}. \tag{14}$$

両辺 2 乗すれば

$$\begin{aligned}&(\text{股})^2((\text{中円径}) - (\text{小円径}))^2 = 4((\text{股}) - (\text{大円径}))^2(\text{小円径})(\text{中円径}). \\ \Leftrightarrow \quad &((\text{大円径}) + (\text{只云う}))^2(\text{また云う})^2 = 4(\text{只云う})^2(\text{小円径})(\text{中円径}). \\ \Leftrightarrow \quad &((\text{大円径})(\text{小円径}) + (\text{只云う})(\text{小円径}))^2(\text{また云う})^2 = 4(\text{只云う})^2(\text{小円径})^3(\text{中円径}). \\ \Leftrightarrow \quad &((\text{中円径})^2 + (\text{右}))^2(\text{また云う})^2 = 4(\text{右})^2(\text{小円径})(\text{中円径}). \\ \Leftrightarrow \quad &((\text{位})^2 + (\text{右}))^2(\text{また云う})^2 = 4(\text{右})^2(\text{小円径})(\text{位}).\end{aligned} \tag{15}$$

ここで, 1 つ目の必要十分条件には式 (1) と式 (3) を, 3 つ目の必要十分条件には式 (12) を, 4 つ目の必要十分条件には式 (6) と式 (7) をそれぞれ用い, 2 つ目の必要十分条件には両辺に $(\text{小円径})^2(> 0)$ を掛けた. 以上より, 式 (8) と式 (9) が等号で結ばれる. また, この等号の式は平山の解説 7) にも記載がある.

3.3 前半の問題の現代的解答

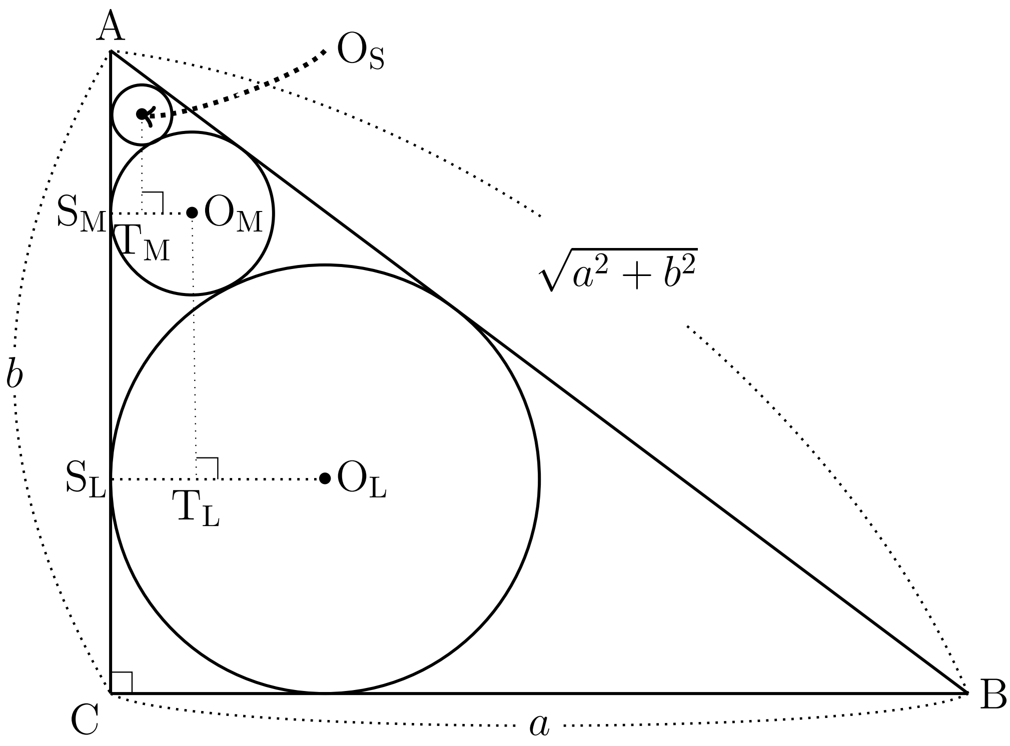


図 4 前半の問題の図.

直角三角形において 図 4 のように AB を斜辺 (弦), AC を短辺 (鉤), CB を中辺 (股) となるように頂点を配置する. ここで, 大円の中心を $\mathrm{O_L}$, 中円の中心を $\mathrm{O_M}$, 小円の中心を $\mathrm{O_S}$ とおき, CB の長さを a, AC の長さを b とおけば AB の長さは $\sqrt{a^2+b^2}$. また, 大円の半径を r_L, 中円の半径を r_M, 小円の半径を r_S とおくとき, $r_\mathrm{L} \geq r_\mathrm{M} \geq r_\mathrm{S}$ である. 大円は △ABC の内接円なので △ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ar_\mathrm{L} + \frac{1}{2}br_\mathrm{L} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}r_\mathrm{L} = \frac{r_\mathrm{L}}{2}(a+b+\sqrt{a^2+b^2}). \tag{16}$$

一方で, $S=(1/2)ab$ より式 (16) は

$$r_\mathrm{L} = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{17}$$

また, $\mathrm{O_L}$ から AC への垂線の足を $\mathrm{S_L}$, $\mathrm{O_M}$ から AC への垂線の足を $\mathrm{S_M}$, $\mathrm{O_M}$ から $\mathrm{S_LO_L}$ への垂線の足を $\mathrm{T_L}$, $\mathrm{O_S}$ から $\mathrm{S_MO_M}$ への垂線の足を $\mathrm{T_M}$ とおく. このとき, $\triangle\mathrm{AS_LO_L}$ に対して, $\mathrm{O_MT_L}$ の長さ $\overline{\mathrm{O_MT_L}}$ は

$$\overline{\mathrm{O_MT_L}} = \sqrt{\overline{\mathrm{O_MO_L}}^2 - \overline{\mathrm{O_LT_L}}^2} = \sqrt{(r_\mathrm{M}+r_\mathrm{L})^2-(r_\mathrm{L}-r_\mathrm{M})^2} = 2\sqrt{r_\mathrm{M}r_\mathrm{L}}. \tag{18}$$

$\triangle \mathrm{AS_L O_L} \sim \triangle \mathrm{O_M T_L O_L}$ より ($\sim$ は相似を表す)

$$\overline{\mathrm{AS_L}} : \overline{\mathrm{S_L O_L}} = \overline{\mathrm{O_M T_L}} : \overline{\mathrm{T_L O_L}}. \quad \Leftrightarrow \quad b - r_\mathrm{L} : r_\mathrm{L} = 2\sqrt{r_\mathrm{L} r_\mathrm{M}} : r_\mathrm{L} - r_\mathrm{M}.$$
$$\Rightarrow \quad r_\mathrm{M} = r_\mathrm{L} + \frac{2r_\mathrm{L}^3 \pm 2r_\mathrm{L}^2\sqrt{(b-r_\mathrm{L})^2 + r_\mathrm{L}^2}}{(b-r_\mathrm{L})^2} \tag{19}$$

となるが, 上記の符号 $+$ のほうは $r_\mathrm{M} \leq r_\mathrm{L}$ より除外. よって,

$$r_\mathrm{M} = r_\mathrm{L} + \frac{2r_\mathrm{L}^3 - 2r_\mathrm{L}^2\sqrt{(b-r_\mathrm{L})^2 + r_\mathrm{L}^2}}{(b-r_\mathrm{L})^2}. \tag{20}$$

このとき, $\triangle \mathrm{O_S T_M O_M}$ に対して, $\mathrm{O_S T_M}$ の長さ $\overline{\mathrm{O_S T_M}}$ は

$$\overline{\mathrm{O_S T_M}} = \sqrt{\overline{\mathrm{O_S O_M}}^2 - \overline{\mathrm{O_M T_M}}^2} = \sqrt{(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{M})^2 - (r_\mathrm{M} - r_\mathrm{S})^2} = 2\sqrt{r_\mathrm{S} r_\mathrm{M}}. \tag{21}$$

$\triangle \mathrm{AS_L O_L} \sim \triangle \mathrm{O_S T_M O_M}$ より

$$\overline{\mathrm{AS_L}} : \overline{\mathrm{S_L O_L}} = \overline{\mathrm{O_S T_M}} : \overline{\mathrm{T_M O_M}}. \quad \Leftrightarrow \quad b - r_\mathrm{L} : r_\mathrm{L} = 2\sqrt{r_\mathrm{S} r_\mathrm{M}} : r_\mathrm{M} - r_\mathrm{S}.$$
$$\Rightarrow \quad r_\mathrm{S} = r_\mathrm{M} + \frac{2r_\mathrm{L}^2 r_\mathrm{M} \pm 2r_\mathrm{L} r_\mathrm{M}\sqrt{(b-r_\mathrm{L})^2 + r_\mathrm{L}^2}}{(b-r_\mathrm{L})^2} \tag{22}$$

となるが, 上記の符号 $+$ のほうは $r_\mathrm{S} \leq r_\mathrm{M}$ より除外. よって,

$$r_\mathrm{S} = r_\mathrm{M} + \frac{2r_\mathrm{L}^2 r_\mathrm{M} - 2r_\mathrm{L} r_\mathrm{M}\sqrt{(b-r_\mathrm{L})^2 + r_\mathrm{L}^2}}{(b-r_\mathrm{L})^2}. \tag{23}$$

式 (20) と式 (23) より

$$r_\mathrm{M} = r_\mathrm{L} + r_\mathrm{L}\frac{2r_\mathrm{L}^2 - 2r_\mathrm{L}\sqrt{(b-r_\mathrm{L})^2 + r_\mathrm{L}^2}}{(b-r_\mathrm{L})^2} = r_\mathrm{L} + r_\mathrm{L}\frac{r_\mathrm{S} - r_\mathrm{M}}{r_\mathrm{M}} = \frac{r_\mathrm{L} r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{M}}. \tag{24}$$

以下, 条件式:

$$\begin{cases} a - 2r_\mathrm{L} = V_1, \\ 2r_\mathrm{M} - 2r_\mathrm{S} = V_2, \\ V_1 = 56.7, \\ V_2 = 19.6 \end{cases} \tag{25}$$

を考慮すると $r_\mathrm{L} \geq r_\mathrm{M} \geq r_\mathrm{S} > 0$, $a \geq b > 0$ より

$$\begin{cases} (17), \\ (20), \\ (24), \\ a - 2r_\mathrm{L} = V_1, \\ 2r_\mathrm{M} - 2r_\mathrm{S} = V_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r_\mathrm{L}^2 - 2(a+b)r_\mathrm{L} + ab = 0, \\ (20), \\ r_\mathrm{M}^2 = r_\mathrm{L} r_\mathrm{S}, \\ a = 2r_\mathrm{L} + V_1, \\ r_\mathrm{S} = r_\mathrm{M} - \dfrac{V_2}{2}. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2r_\mathrm{L}(V_1 + r_\mathrm{L})}{V_1}, \\ r_\mathrm{M} = r_\mathrm{L} + \dfrac{2V_1 r_\mathrm{L}}{(V_1 + 2r_\mathrm{L})^2}\left(V_1 - \sqrt{2V_1^2 + 4r_\mathrm{L} V_1 + 4r_\mathrm{L}^2}\right), \\ r_\mathrm{M}^2 = r_\mathrm{L} r_\mathrm{S}, \\ a = 2r_\mathrm{L} + V_1, \\ r_\mathrm{S} = r_\mathrm{L} + \dfrac{2V_1 r_\mathrm{L}}{(V_1 + 2r_\mathrm{L})^2}\left(V_1 - \sqrt{2V_1^2 + 4r_\mathrm{L} V_1 + 4r_\mathrm{L}^2}\right) - \dfrac{V_2}{2} \end{cases} \tag{26}$$

より,

$$
\begin{aligned}
0 &= r_{\mathrm{M}}^2 - r_{\mathrm{L}} r_{\mathrm{S}} \\
&= \left\{ r_{\mathrm{L}} + \frac{2V_1 r_{\mathrm{L}}}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^2} \left(V_1 - \sqrt{2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2} \right) \right\}^2 \\
&\quad - r_{\mathrm{L}} \left\{ r_{\mathrm{L}} + \frac{2V_1 r_{\mathrm{L}}}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^2} \left(V_1 - \sqrt{2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2} \right) - \frac{V_2}{2} \right\} \\
&= r_L^2 + \frac{4V_1 r_{\mathrm{L}}^2}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^2} \left(V_1 - \sqrt{2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2} \right) + \frac{4V_1^2 r_{\mathrm{L}}^2}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^4} \left(V_1 - \sqrt{2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2} \right)^2 \\
&\quad - r_L^2 - \frac{2V_1 r_{\mathrm{L}}^2}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^2} \left(V_1 - \sqrt{2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2} \right) + \frac{V_2 r_{\mathrm{L}}}{2} \\
&= \frac{2V_1 r_{\mathrm{L}}^2}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^2} \left(V_1 - \sqrt{2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2} \right) + \frac{4V_1^2 r_{\mathrm{L}}^2}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^4} \left(V_1 - \sqrt{2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2} \right)^2 + \frac{V_2 r_{\mathrm{L}}}{2} \\
&= \frac{2V_1 r_{\mathrm{L}}^2}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^2} \left(V_1 - \sqrt{2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2} \right) \\
&\quad + \frac{4V_1^2 r_{\mathrm{L}}^2}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^4} \left(-2V_1\sqrt{2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2} + 3V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2 \right) + \frac{V_2 r_{\mathrm{L}}}{2} \\
&= \frac{2V_1^2 r_{\mathrm{L}}^2}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^4} (7V_1^2 + 12V_1 r_{\mathrm{L}} + 12r_{\mathrm{L}}^2) + \frac{1}{2} V_2 r_{\mathrm{L}} \\
&\quad - \frac{2V_1 r_{\mathrm{L}}^2}{(V_1+2r_{\mathrm{L}})^4} (5V_1^2 + 4V_1 r_{\mathrm{L}} + 4r_{\mathrm{L}}^2) \sqrt{2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
(27). \quad &\Rightarrow \quad 16V_1^4 r_{\mathrm{L}}^2 (7V_1^2 + 12V_1 r_{\mathrm{L}} + 12r_{\mathrm{L}}^2)^2 + 8V_1^2 V_2 r_{\mathrm{L}} (7V_1^2 + 12V_1 r_{\mathrm{L}} + 12r_{\mathrm{L}}^2)(V_1+2r_{\mathrm{L}})^4 \\
&\qquad + V_2^2 (V_1+2r_{\mathrm{L}})^8 = 16V_1^2 r_{\mathrm{L}}^2 (2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + 4r_{\mathrm{L}}^2)(5V_1^2 + 4V_1 r_{\mathrm{L}} + 4r_{\mathrm{L}}^2)^2. \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = 16V_1^4 r_{\mathrm{L}}^2 (49V_1^4 + 168V_1^3 r_{\mathrm{L}} + 312V_1^2 r_{\mathrm{L}}^2 + 288V_1 r_{\mathrm{L}}^3 + 144r_{\mathrm{L}}^4) \\
&\qquad + 8V_1^2 V_2 r_{\mathrm{L}} (7V_1^2 + 12V_1 r_{\mathrm{L}} + 12r_{\mathrm{L}}^2)(V_1^4 + 8V_1^3 r_{\mathrm{L}} + 24V_1^2 r_{\mathrm{L}}^2 + 32V_1 r_{\mathrm{L}}^3 + 16r_{\mathrm{L}}^4) \\
&\qquad + V_2^2 (V_1^8 + 16V_1^7 r_{\mathrm{L}} + 112V_1^6 r_{\mathrm{L}}^2 + 448V_1^5 r_{\mathrm{L}}^3 + 1120V_1^4 r_{\mathrm{L}}^4 + 1792V_1^3 r_{\mathrm{L}}^5 + 1792V_1^2 r_{\mathrm{L}}^6 \\
&\qquad\quad + 1024V_1 r_{\mathrm{L}}^7 + 256r_{\mathrm{L}}^8) \\
&\qquad - 16V_1^2 r_{\mathrm{L}}^2 (2V_1^2 + 4r_{\mathrm{L}}V_1 + r_{\mathrm{L}}^2)(25V_1^4 + 40V_1^3 r_{\mathrm{L}} + 56V_1^2 r_{\mathrm{L}}^2 + 32V_1 r_{\mathrm{L}}^3 + 16r_{\mathrm{L}}^4). \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = (-1024V_1^2 + 256V_2^2) r_{\mathrm{L}}^8 + (-3072V_1^3 + 1536V_1^2 V_2 + 1024V_1 V_2^2) r_{\mathrm{L}}^7 \\
&\qquad + (-3840V_1^4 + 4608V_1^3 V_2 + 1792V_1^2 V_2^2) r_{\mathrm{L}}^6 + (-2560V_1^5 + 6272V_1^4 V_2 + 1792V_1^3 V_2^2) r_{\mathrm{L}}^5 \\
&\qquad + (-960V_1^6 + 4864V_1^5 V_2 + 1120V_1^4 V_2^2) r_{\mathrm{L}}^4 + (-192V_1^7 + 2208V_1^6 V_2 + 448V_1^5 V_2^2) r_{\mathrm{L}}^3 \\
&\qquad + (-16V_1^8 + 544V_1^7 V_2 + 112V_1^6 V_2^2) r_{\mathrm{L}}^2 + (56V_1^8 V_2 + 16V_1^7 V_2^2) r_{\mathrm{L}} + V_1^8 V_2^2.
\end{aligned} \tag{28}
$$

$V_1 > V_2$ より式 (28) は最高次数の符号が負かつ y 切片が正であることから $r_{\mathrm{L}} > 0$ で必ず実数解をもつ. 式 (28) の右辺を $f(r_{\mathrm{L}})$ とおくとき, 式 (25) から

$$
f(r_{\mathrm{L}}) = c_8 r_{\mathrm{L}}^8 + c_7 r_{\mathrm{L}}^7 + c_6 r_{\mathrm{L}}^6 + c_5 r_{\mathrm{L}}^5 + c_4 r_{\mathrm{L}}^4 + c_3 r_{\mathrm{L}}^3 + c_2 r_{\mathrm{L}}^2 + c_1 r_{\mathrm{L}} + c_0, \tag{29}
$$

$$
c_8 = -1024V_1^2 + 256V_2^2 \approx -3.19370 \times 10^6, \tag{30}
$$

$$
c_7 = -3072V_1^3 + 1536V_1^2 V_2 + 1024V_1 V_2^2 \approx -4.40886 \times 10^8, \tag{31}
$$

$$
c_6 = -3840V_1^4 + 4608V_1^3 V_2 + 1792V_1^2 V_2^2 \approx -2.10119 \times 10^{10}, \tag{32}
$$

$$c_5 = -2560V_1^5 + 6272V_1^4V_2 + 1792V_1^3V_2^2 \approx -1.04176 \times 10^{11}, \tag{33}$$
$$c_4 = -960V_1^6 + 4864V_1^5V_2 + 1120V_1^4V_2^2 \approx 2.84167 \times 10^{13}, \tag{34}$$
$$c_3 = -192V_1^7 + 2208V_1^6V_2 + 448V_1^5V_2^2 \approx 1.17711 \times 10^{15}, \tag{35}$$
$$c_2 = -16V_1^8 + 544V_1^7V_2 + 112V_1^6V_2^2 \approx 1.98085 \times 10^{16}, \tag{36}$$
$$c_1 = 56V_1^8V_2 + 16V_1^7V_2^2 \approx 1.28829 \times 10^{17}, \tag{37}$$
$$c_0 = V_1^8V_2^2 \approx 4.10371 \times 10^{16}. \tag{38}$$

記号 $\approx$ は有効数字 6 桁で表すために近似的に正しいという意味で用いている．なお, 今回は有効数字 6 桁の精度で十分である．$c_5, c_6, c_7, c_8 < 0$ より, $r_{\mathrm{L}} > 0$ において $f(r_{\mathrm{L}})$ を 5 回微分した関数 $f^{(5)}(r_{\mathrm{L}})$ は $f^{(5)}(r_{\mathrm{L}}) < 0$ となる．よって, $f^{(4)}(r_{\mathrm{L}})$ は単調減少関数となり,

$$f^{(4)}(r_{\mathrm{L}}) = 1680c_8r_{\mathrm{L}}^4 + 840c_7r_{\mathrm{L}}^3 + 360c_6r_{\mathrm{L}}^2 + 120c_5r_{\mathrm{L}} + 24c_4 \tag{39}$$

より, $f^{(4)}(0) = 24c_4 \approx 6.820 \times 10^{14} > 0$. また, $f^{(4)}(8) \approx -1.137 \times 10^{14} < 0$ より $f^{(4)}(s_4) = 0$ を満たす数 s_4 が区間 $[0, 8]$ に唯一つ存在する．

$$f'''(r_{\mathrm{L}}) = 336c_8r_{\mathrm{L}}^5 + 210c_7r_{\mathrm{L}}^4 + 120c_6r_{\mathrm{L}}^3 + 60c_5r_{\mathrm{L}}^2 + 24c_4r_{\mathrm{L}} + 6c_3 \tag{40}$$

より, $f'''(r_{\mathrm{L}})$ は $0 < r_{\mathrm{L}} < s_4$ で単調増加, $s_4 < r_{\mathrm{L}}$ で単調減少となる．$f'''(0) = 6c_3 > 0$, $f'''(16) \approx -1.146 \times 10^{15} < 0$. したがって, $f'''(s_3) = 0$ を満たす数 s_3 が区間 $[0, 16]$ に唯一つ存在する．

$$f''(r_{\mathrm{L}}) = 56c_8r_{\mathrm{L}}^6 + 42c_7r_{\mathrm{L}}^5 + 30c_6r_{\mathrm{L}}^4 + 20c_5r_{\mathrm{L}}^3 + 12c_4r_{\mathrm{L}}^2 + 6c_3r_{\mathrm{L}} + 2c_2 \tag{41}$$

より, $f''(r_{\mathrm{L}})$ は $0 < r_{\mathrm{L}} < s_3$ で単調増加, $s_3 < r_{\mathrm{L}}$ で単調減少となる．$f''(0) = 2c_2 > 0$, $f''(24) \approx -1.403 \times 10^{16} < 0$. したがって, $f''(s_2) = 0$ を満たす数 s_2 が区間 $[0, 24]$ に唯一つ存在する．

$$f'(r_{\mathrm{L}}) = 8c_8r_{\mathrm{L}}^7 + 7c_7r_{\mathrm{L}}^6 + 6c_6r_{\mathrm{L}}^5 + 5c_5r_{\mathrm{L}}^4 + 4c_4r_{\mathrm{L}}^3 + 3c_3r_{\mathrm{L}}^2 + 2c_2r_{\mathrm{L}} + c_1 \tag{42}$$

より, $f'(r_{\mathrm{L}})$ は $0 < r_{\mathrm{L}} < s_2$ で単調増加, $s_2 < r_{\mathrm{L}}$ で単調減少となる．$f'(0) = c_1 > 0$, $f'(32) \approx -2.308 \times 10^{17} < 0$. したがって, $f'(s_1) = 0$ を満たす数 s_1 が区間 $[0, 32]$ に唯一つ存在する．よって, $f(r_{\mathrm{L}})$ は $0 < r_{\mathrm{L}} < s_1$ で単調増加, $s_1 < r_{\mathrm{L}}$ で単調減少となる．$f(39) \approx 9.829 \times 10^{18} > 0$, $f(40) \approx -4.928 \times 10^{18} < 0$. したがって, $f(s_0) = 0$ を満たす数 s_0 が $[39, 40]$ に唯一つ存在する．

8 次方程式 $f(r_{\mathrm{L}})$ の解を二分法で求めることにする．Python のプログラムは以下:

```
import numpy
v1=56.7
v2=19.6
l=39
r=40
def f(rL):
  c8=-1024*v1*v1+256*v2*v2
  c7=-3072*pow(v1,3)+1536*v1*v1*v2+1024*v1*v2*v2
  c6=-3840*pow(v1,4)+4608*pow(v1,3)*v2+1792*v1*v1*v2*v2
```

```
  c5=-2560*pow(v1,5)+6272*pow(v1,4)*v2+1792*pow(v1,3)*v2*v2
  c4=-960*pow(v1,6)+4864*pow(v1,5)*v2+1120*pow(v1,4)*v2*v2
  c3=-192*pow(v1,7)+2208*pow(v1,6)*v2+448*pow(v1,5)*v2*v2
  c2=-16*pow(v1,8)+544*pow(v1,7)*v2+112*pow(v1,6)*v2*v2
  c1=56*pow(v1,8)*v2+16*pow(v1,7)*v2*v2
  c0=pow(v1,8)*v2*v2
  ans=c8*pow(rL,8)+c7*pow(rL,7)+c6*pow(rL,6)+c5*pow(rL,5)+c4*pow(rL,4)
  ans+=c3*pow(rL,3)+c2*pow(rL,2)+c1*rL+c0
  return ans
epsilon=pow(10.0,-10)
countMax=1000
count=0
while abs((f(l)-f(r))/f(l))>epsilon:
 c = (l+r)/2.0
 if f(l) * f(c) <0:
  r=c
 else:
  l=c
 count=count+1
 if count > countMax:
  break

rL=c
rM=(rL-numpy.sqrt(rL*rL-2.0*v2*rL))/2.0
rS=rM-v2/2.0
a=2.0*rL+v1
b=2.0*rL*(v1+rL)/v1
print("2r_L=", 2.0*rL)
print("2r_M=", 2.0*rM)
print("2r_S=", 2.0*rS)
print("a=", a)
print("b=", b)
print("c=", numpy.sqrt(a*a+b*b))
```

ここから, 有効数字 6 桁で求めると, 大円の直径は 79.3800, 中円の直径は 35.2800, 小円の直径は 15.6800, 底辺 (股) は 136.080, 高さ (鉤) は 134.946, 斜辺 (弦) は 191.646 となる. この結果は尾刀の解答と一致している.

上記の解答からは, 導出される 8 次方程式には正の解があるとしたら 1 つしかないこと (一意性) と, 中間値の定理による解の存在が示せている形となっている. この解の存在や一意性についての議論は, 尾刀の解

答には見られない.

4. おわりに

真法弟算記に記載されている, 尾刀和右衛門為隆による問題の解答について, 現代的な手法により, 解の確認を行った. 値としては有効数字 6 桁で正しいことがわかった. また解の一意性と存在を新たに示し, 解答がたしかに弟算記に記された値のみに限られることがわかった.

付記

本問題には, 元の問題を改変し第三者への解答を促した新しい問題が付随している (遺題継承と呼ばれる). そこには問題のみが記載されており, 解答はない. そこで, ここでは問題の記載と立式, 解答までを記載した. 解の一意性や解答に至る説明が不十分であったため, 付録扱いとした.

A.1 後半の問題の内容

4 つの円が短辺に沿って並べたものを含む直角三角形がある. 小円の直径の根号と微小円の直径の根号の和の 40 倍から大円の直径を引いた差が 54 歩, 中円の直径の二乗から直角三角形の中辺を引いた差が 39 歩. このとき, 4 つの円の直径及び直角三角形の各辺の長さを求めよ.

A.2 後半の問題の解答

直角三角形において AB を斜辺 (弦), AC を短辺 (鉤), CB を中辺 (股) となるように頂点を配置する. ここで, 大円 (甲円) の中心を $\mathrm{O_L}$, 中円 (乙円) の中心を $\mathrm{O_M}$, 小円 (丙円) の中心を $\mathrm{O_S}$, 微小円 (丁円) の中心を $\mathrm{O_T}$ とおき, CB の長さを a, AC の長さを b とおけば AB の長さは $\sqrt{a^2+b^2}$. また, 大円の半径を r_L, 中円の半径を r_M, 小円の半径を r_S, 微小円の半径を r_T とおくとき, $r_\mathrm{L} \geq r_\mathrm{M} \geq r_\mathrm{S} \geq r_\mathrm{T}$ である. 大円は $\triangle$ABC の内接円なので $\triangle$ABC の面積 S についての関係から式 (17) が成り立つ.

$\triangle \mathrm{AS_L O_L} \sim \triangle \mathrm{O_T T_S O_S}$ より

$$\overline{\mathrm{AS_L}} : \overline{\mathrm{S_L O_L}} = \overline{\mathrm{O_T T_S}} : \overline{\mathrm{T_S O_S}}. \quad \Leftrightarrow \quad b - r_\mathrm{L} : r_\mathrm{L} = 2\sqrt{r_\mathrm{T} r_\mathrm{S}} : r_\mathrm{S} - r_\mathrm{T}.$$

$$\Rightarrow \quad r_\mathrm{T} = r_\mathrm{S} + \frac{2r_\mathrm{L}^2 r_\mathrm{S} \pm 2r_\mathrm{L} r_\mathrm{S}\sqrt{(b-r_\mathrm{L})^2 + r_\mathrm{L}^2}}{(b-r_\mathrm{L})^2} \tag{A- 1}$$

となるが, 上記の符号 $+$ のほうは $r_\mathrm{T} \leq r_\mathrm{S}$ より除外. よって,

$$r_\mathrm{T} = r_\mathrm{S} + \frac{2r_\mathrm{L}^2 r_\mathrm{S} - 2r_\mathrm{L} r_\mathrm{S}\sqrt{(b-r_\mathrm{L})^2 + r_\mathrm{L}^2}}{(b-r_\mathrm{L})^2} \tag{A- 2}$$

式 (20) と式 (A- 2) より

$$r_\mathrm{T} r_\mathrm{L} = r_\mathrm{S} r_\mathrm{M} \tag{A- 3}$$

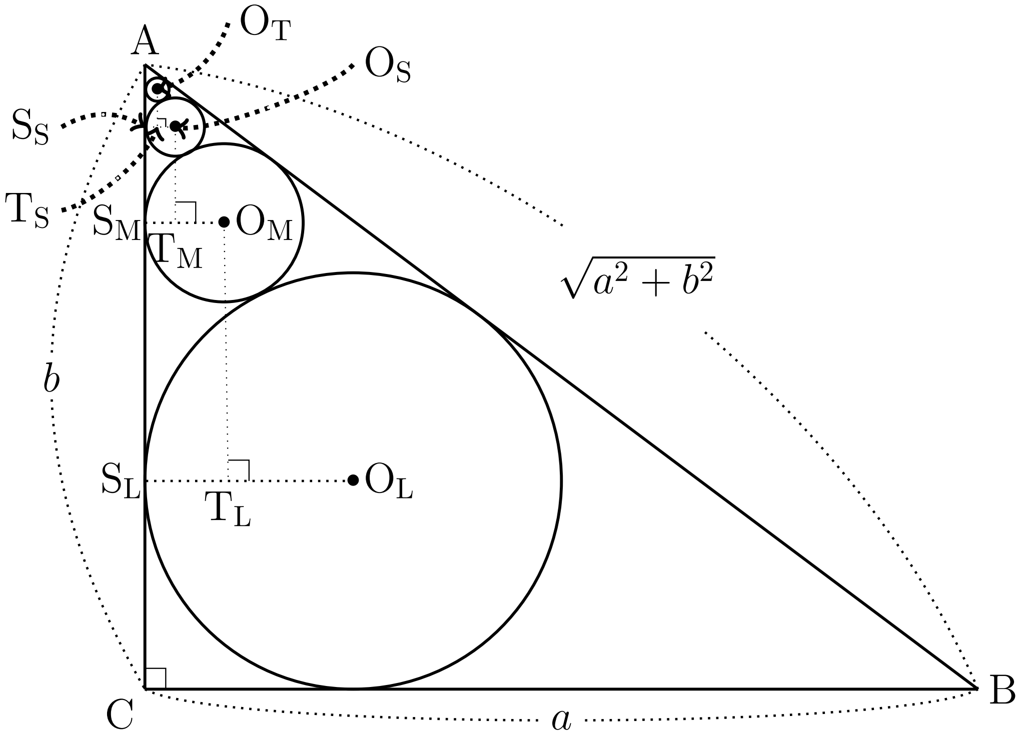


図 5　後半の問題の図.

以下, 条件式:

$$\begin{cases} 40(\sqrt{2r_{\mathrm{S}}}+\sqrt{2r_{\mathrm{T}}})-2r_{\mathrm{L}}=V_3. \\ (2r_{\mathrm{M}})^2-b=V_4. \\ V_3=54. \\ V_4=39 \end{cases} \tag{A- 4}$$

を考慮すれば

$$\begin{cases} (17) \\ (20) \\ (24) \\ (\text{A- }3) \\ 40(\sqrt{2r_{\mathrm{S}}}+\sqrt{2r_{\mathrm{T}}})-2r_{\mathrm{L}}=V_3. \\ (2r_{\mathrm{M}})^2-b=V_4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r_{\mathrm{L}}^2-2(a+b)r_{\mathrm{L}}+ab=0. \\ r_{\mathrm{M}}=r_{\mathrm{L}}\left(\dfrac{\sqrt{(b-r_{\mathrm{L}})^2+r_{\mathrm{L}}^2}-r_{\mathrm{L}}}{b-r_{\mathrm{L}}}\right)^2. \\ r_{\mathrm{M}}^2=r_{\mathrm{L}}r_{\mathrm{S}} \\ r_{\mathrm{T}}r_{\mathrm{L}}=r_{\mathrm{S}}r_{\mathrm{M}} \\ 40(\sqrt{2r_{\mathrm{S}}}+\sqrt{2r_{\mathrm{T}}})-2r_{\mathrm{L}}=V_3. \\ (2r_{\mathrm{M}})^2-b=V_4. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{2r_{\mathrm{L}}(b - r_{\mathrm{L}})}{b - 2r_{\mathrm{L}}}, \\ r_{\mathrm{M}} = r_{\mathrm{L}} \left(\dfrac{\sqrt{(b - r_{\mathrm{L}})^2 + r_{\mathrm{L}}^2} - r_{\mathrm{L}}}{b - r_{\mathrm{L}}} \right)^2, \\ r_{\mathrm{S}} = r_{\mathrm{L}} \left(\dfrac{\sqrt{(b - r_{\mathrm{L}})^2 + r_{\mathrm{L}}^2} - r_{\mathrm{L}}}{b - r_{\mathrm{L}}} \right)^4, \\ r_{\mathrm{T}} = r_{\mathrm{L}} \left(\dfrac{\sqrt{(b - r_{\mathrm{L}})^2 + r_{\mathrm{L}}^2} - r_{\mathrm{L}}}{b - r_{\mathrm{L}}} \right)^6, \\ \dfrac{40\sqrt{V_4 + b}}{\sqrt{2r_{\mathrm{L}}}} \left(1 + \dfrac{\sqrt{(b - r_{\mathrm{L}})^2 + r_{\mathrm{L}}^2} - r_{\mathrm{L}}}{b - r_{\mathrm{L}}} \right) - 2r_{\mathrm{L}} = V_3, \\ 4r_{\mathrm{L}}^2 \left(\dfrac{\sqrt{(b - r_{\mathrm{L}})^2 + r_{\mathrm{L}}^2} - r_{\mathrm{L}}}{b - r_{\mathrm{L}}} \right)^4 - b = V_4. \end{cases} \tag{A- 5}$$

これを解くと, 大円 (甲円) の直径は 36 歩, 中円 (乙円) の直径は 9 歩, 小円 (丙円) の直径は 2.25 歩, 微小円 (丁円) の直径は 0.47233 歩, 斜辺 (弦) は 150 歩, 中編 (股) は 144 歩, 短辺 (鉤) は 42 歩である.

謝辞

査読者の貴重なコメントに感謝いたします。八戸市立図書館 歴史資料グループ 主事兼学芸員の滝尻 侑貴様には, 真法弟算記をはじめとした市立図書館に所蔵されている古文書の複写の協力や, 貴重な助言を頂いたことが本研究に大きな手助けとなりました. また, 八戸工業大学図書館情報事務室の正部家 真由様には, 大学図書館所蔵の藩日記の調査などをお手伝い頂き, 本研究の発展への手助けとなりました. この場を借りて深く御礼申し上げます.

本紀要におけるフォントの一部に「グリフウィキ (Glyphwiki)」のものを使用した.

本研究は, 一般財団法人青森県工業技術教育振興会若手研究者研究助成, 二松學舍大学東アジア学術総合研究所共同研究プロジェクトの支援を受けた.

参考文献

1) 真法弟算記は, 天の巻, 地の巻が存在しており, 八戸市立図書館に 1 組が存在しているのみ. 書き起こし文については, “新編八戸市史 近世資料編 III” や “青森県史 資料編 近世 学芸関係” などに一部ある.
2) 佐藤 賢一, “近世日本数学史”, 東京大学出版会 (2005).
3) 三上 義夫, “三上義夫著作集 第 2 巻 関孝和研究”, 日本評論社 (2017).
4) 竹之内 脩, “関孝和の数学”, 共立出版 (2008).
5) 上野 健爾, 小川 束, 小林 龍彦, 佐藤 健一, “関孝和論序説”, 岩波書店 (2008).
6) 小川 束, 佐藤 健一, 竹之内 脩, 森本 光生, “建部賢弘の数学”, 共立出版 (2008).
7) 桑原 秀夫, “真法恵賢”, 日本数学史学会近畿支部 (1978).
8) 吉岡 政和, “八戸藩の数学”, Vol. 3. 八戸歴史研究会, pp.22-30 (1983).
9) 山口 正義, “北武蔵の和算家”, まつやま書房, (2017).
10) 藤井 康生, “算法天生法指南 問題の解説”, 大阪教育図書 (1997).

11) 佐藤 健一, “塵劫記を読みとく百科”, 丸善出版 (2021).
12) 小林 龍彦, 松本 登志雄, 田部井 勝稲, “精要算法 巻之上・巻之中 (文章題)”, 一粒書房 (2021).
13) 田部井 勝稲, “精要算法 巻之下 (幾何問題)”, 一粒書房 (2021).
14) 深川 英俊, トニー・ロスマン, “聖なる数学：算額”, 森北出版株式会社 (2012).
15) 平野 年光, “算額問題の教材化 2 和算”, 東洋館出版 (2016).
16) 深川 英俊, “例題で知る日本の数学と算額”, 森北出版株式会社 (1998).
17) 土屋 拓也, 今井 悠人, “真法恵賢と真法弟算記について”, 八戸工業大学紀要第 40 巻, pp.46–57 (2021).

概要

真法弟算記に記載されているある問題について, その解を精査する. 高次方程式の解を求めることになるため, 数値計算を用いて解を高精度に得る. また, 解析の方面からも解の数などの条件について考察する.